الجمهورية العربية السورية

جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الفيزياء

كثيرات حدود زونال كأشعة منفردة في نظرية الحقل التوافقي

Zonal Polynomials as Singular Vectors in Conformal Field Theory

أطروحة أعدت لنيل درجة الدكتوراه في الفيزياء

إعداد

عبدالقادر علي سعيد

إشراف

أ.م.د مصطفى صائم الدهر — **جامعة دمشق**

أ. د. نورالدين شعير — **الجامعة الأردنية**

2013-2014

شكر

أتقدم بالشكر الخالص والامتنان لأستاذي ومشرفي **الدكتور مصطفى صائم الدهر** على خلقه الجميل وتوجيهاته لي خلال البحث ومتابعته للعمل وتقديم المساعدة والدعم المعنوي .أسأل الله القدير أن يجعل الدنيا في قبضته ويجري الخير على يديه .

كما أتقدم بالشكر والعرفان لأستاذي **الدكتور نور الدين شعير** من الجامعة الأردنية الذي اشرف على الرسالة خلال تواجدي في الأردن وقدم لي المساعدة والتوجيه فله مني خالص المحبة والوفاء.

والشكر موصول لرئاسة جامعة دمشق وعمادة كلية العلوم التي تعهدتني بالرعاية والاهتمام منذ أن بدأت الدراسة في هذا البلد الطيب بأهله وترابه.

ولا يسعني في نهاية الكلمة إلا أن أتوجه بالشكر الجزيل إلى أعضاء لجنة الحكم الممثلة بـ :

الدكتور فوزي عوض، والدكتور محمد بشير قابيل ، والدكتور نضال شمعون، والدكتوره حسيبه خير بك ، الذين تجشموا عناء قراءة الرسالة ، وأكرموني بتصويبها ،وأثروها بإبداء ملاحظاتهم القيمة التي سوف أستفيد منها في أعمالي القادمة .

وأشكر أساتذتي الأجلاء في قسم الفيزياء على نبل أخلاقهم وتواضعهم . وأشكر كذلك الصديق العزيز المهندس احمد سعد الدين على عونه لي،و كل ذي يد عليّ وساعدني .

والحمد لله رب العالمين

عبدالقادر علي سعيد

دمشق 2014/4/1

الإهداء

إلى الشمعة التي ينبض قلبها حباً وعطاءً ... أمي

إلى رفيقة الدرب ورقيقة القلب ..... زوجتي

إلى أبنائي الأحباء عاصم ،رزان،ربى

إلى القريبين من القلب أخوتي وأخواتي

إلى أصدقائي الأعزاء

وفاء .. ومحبة

الفهرس

الملخص

لقد تركز اهتمام علماء الفيزياء النظرية الحديثة على نظريات الحقل التو افقي منذ ان ارتبطت بالفيزياء النظرية ، وبدأت تشرح الظواهر الحرجة كالتحول الطوري من الرتبة الثانية وتلعب دورا مركزيا في نظرية الأوتار(string theory) وهي في الوقت الحاضر واعدة ومرشحة لتلعب دورا مهما في نظرية التوحيد(Unifying Theory) لجميع القوى.

الشعاع المنفرد في النماذج التوافقية عبارة عن حالة فيزيائية (Physical State) في الحقل الكمومي التوافقي تقدم وصفاً للمادة أو الوتر من حيث الطاقة أو السبين كما أنّها تتعلق بدوال الارتباط (correlation function) ،ويصف أثر تدفق الطاقة على طول الترابط بين الجزيئات عند النقاط الحرجة ونوع التفاعل بين الحقول المختلفة في النظام الفيزيائي .

تم في هذا العمل بناء الأشعة المنفردة باستخدام كثيرات حدود زونال الحقيقية ،وتبين أنّ شكل(مخطط) التجزئة لهذه الأشعة هو مستطيل ،وتبين أنّه عند أخذ العلاقة بين نموذج كالوغيرو− ساذرلاند ونظرية الحقل التوافقي بعين الاعتبار فإن الشحنة المركزية تأخذ قيمة محددة $c=-2$ لأنّ معامل الاقتران بينهما $\beta=2$ ،و تبين لنا خلال البحث أنّ هناك حالات خاصة لنموذج $c=-2$ أهمها عند الوزن التوافقي ($h=-\frac{1}{8}$) وذلك لمقاربة هذا النموذج مع شبيكة بوليمر مكثفة.

وتم كذلك بناء الأشعة المنفردة للحالات المنفصلة (discrete states) باستخدام كثيرات حدود زونال العقدية، وذلك عن طريق كوهومولوجي BRST عند اقتران الجاذبية في بعدين مع المادة .

كذلك تم التعبير عن كثيرات حدود زونال من الرتبة الثانية للشعاع المنفرد بدلالة الدوال فوق الهندسية (hypergeomeric functions) عند إدخال هاملتون كالوغيرو−ساذرلاند من الدرجة الثانية كحالة خاصة ،وذلك للتغلب على

التباعد(divergence) في دوال الارتباط (correlation functions) في خلية جوردان.

وتم الحصول على علاقة مرجعية اضافية نتجت من تطبيق هاملتون كالوغيرو – ساذرلاند على الشعاع المنفرد عند $c < 1$ ،وتساعد على إيجاد معاملات الشعاع المنفرد دون الحاجة لتطبيق مولدات جبر فيراسورو .

المشكلة العلمية :

ايجاد الشعاع المنفرد من كثيرات حدود زونـال ودراستـــه في نظرية الحقل التوافقي باستخــدام مولـــدات فيراسورو وتطبيقه على نماذج حقيقية إن أمكن ذلك ونوع التفاعـل بين حقل المـادة والحقول الأخرى إن وجد.

الدراسات السابقة و أهمية البحث :

تمت دراسة الشعـــاع المنفرد باستــخدام كثيرات حدود شــور من قبل [Bouwknegt(4)]،ثم تمت دراسة الشعاع المنفـرد كتركيب خطـي في كثيرات حدود شور من قبـــل [شعير ،دوبريف و كانو (6)] ووضــع تنبؤ لحـالة الشعاع المنفرد عند عدد من المستويات، قام [Yamada,Mimachi(28)] ببناء الشعاع المـنفرد باستخـدام كثيرات حدود جــاك لمستــويات محـددة، **[**Sakamoto,others(33)**]** درس المتجه المنفرد باستخدام كثيرات حـــدود جاك عند (c<1) ، وفي رسالتي لدرجـة الماجستير قمت بدراســة الشعــاع المنفرد لاقتـــران الجاذبيـة ذات البـعدين مع المـــادة باستخدام كثيرات حدود شور.

درس [جيمس(20)] خصائص كثيرات حدود زونال وأثبت أنها دوال ذاتية لمؤثر تفاضلي من الدرجة الثانية، [تاكيمورا(36)] أضاف خصائص جديدة لكثيرات حدود زونال.[غارسيا(15)] اثبت أن كثيرات حدود زونال هي دوال ذاتية لمؤثر لابلاس -بلترامي .

أجريت أبحاث عديدة على الشعاع المنفـرد لمستويات محددة من خـــلال كثيرات حدود جاك العامة، واستكمالا للدراسات السابقة تمت دراسة الشعاع المنفرد بدلالة كثيرات حدود زونال ،ومقارنة النموذج الناتج مع نموذج لشبكة (lattice) من البوليمرات المكثفة في بعدين .

هدف مشروع البحث:

بناء الشعاع المنفرد من كثيرات حدود زونال ودراسته باستخدام مولدات فيراسورو، ودراسة النموذج الناتج بالاعتماد على الشحنة المركزية المتعلقة بارتباط كثيرات حدود زونال بنموذج كالوغيرو- ساذلاند ومن ثم النموذج الموافق لها ونوع التفاعل بين حقل المادة والحقول الأخرى إن وجد.

الجديد في هذا البحث هو ما يلي:

التعبير عن الأشعة المنفردة بدلالة كثيرات حدود زونال حيث انه لم يتم التطرق لهذا الموضوع سابقا.

كما تبين انه من خلال هذا النموذج يمكن دراسة شبكة بوليمر مكثفة من خلال دالات الارتباط والشعاع المنفرد بدلالة كثيرات حدود زونال.

فتح المجال لدراسة الظواهر الحرجة عند التحول الطوري من الرتبة الثانية(second order phase transition)باستخدام الأشعة المنفردة بدلالة كثيرات حدود زونال .

التعبير عن الشعاع المنفرد عند اقتران الجاذبية مع المادة بدلالة كثيرات حدود زونال العقدية .

تم تقديم **البحث** على الشكل التالي:

في **الفصل الأول** تم تقديم المفاهيم اساسية مثل نظرية الحقل التوافقي النظام الفرميوني ،النظام البوزوني،التجزئة وتمثيل يونغ ،الاقترانات المتناظرة.

في **الفصل الثاني** تم تعريف كثيرات حدود زونال رياضيا وعلاقتها مع الاقترانات المتناظرة الاساسية وكيفية بناء كثيرات حدود زونال باستخدام احد الاقترانات المتناظرة وتم حساب كثيرة زونال باستخدام احاديات الحد لغاية الدرجة الخامسة.

في **الفصل الثالث** تمت دراسة العلاقة بين نظرية الحقل التوافقي ونموذج كالوغيرو ساذرلاند وتم التعبير عن الهاملتون لهذا النموذج باستخدام مولدات فيراسورو كذلك دراسة أثر هاملتون كالوغيرو-ساذرلاند على الشعاع المنفرد.

في **الفصل الرابع** تم تمثيل كثيرات حدود زونال باستخدام مؤثرات هايزبرغ ثم باستخدام الاقتران الأسي المتناظر (symmetric power sum function) بعد ذلك تم بناء الشعاع المنفرد بدلالة كثيرات حدود زونال الحقيقية، كذلك تم تطبيق حالة خاصة من هاملتون كالوغيروساذلاند على كثيرات حدود زونال ذات التجزئة الثنائية والتعبير عنها بدلالة الدوال فوق الهندسية ومقارنة ذلك بنموذج شبكة بوليمر مكثفة في النظرية اللوغريتمية التوافقية عند الوزن التوافقي $(h=\frac{1}{8})$ والشحنة المركزية $(c=-2)$.

في **الفصل الخامس** :تم بناء الشعاع المنفرد لاقتران الجاذبية ذات البعدين مع المادة بدلالة كثيرات حدود زونال العقدية لعدد من المستويات وتعميم العلاقة العامة لمعامل هذا الشعاع .

Zonal polynomials in Calogero-Sutherland Model and Conformal quantum field theory

Abed Alkader. A. Said, Moustafa Sayem eldaher

Department of Physics, Damascus University, Syria

Nour eddine Chair
***Department of Physics*, Jordan university, Jordan**

Research Journal of Alepo University. (Accepted Mar.2013)

Abstract
The action of Calogero-Sutherland Hamiltonian on Fock space of symmetric Zonal functions is studied ,it is proved that Zonal functions are eigen functions of. Calogero-Sutherland Hamiltonian. The relation between Calogero-Sutherland model and virasoro algebra is used to build the singular vectors in term of Zonal polynomials. We proved the rectangular shape of these singular vectors ,these singular vectors can be used to calculate the correlation functions for dense polymer at critical point in phase transition.

Key words: *Calogero-Sutherland* Hamiltonian, Zonal Function, ,Singular vector, Virasoro generators, virasoro algebra. conformal field theory.

1. Introduction

Conformal invariant quantum field theories describe the critical behavior of systems at second order phase transitions by some functions which are called correlation functions. correlation functions study the correlation length between particles at critical point. The canonical example is the Ising model in two dimensions, with spins $\sigma_i = \pm 1$ on sites of a square lattice.

The partition function $Z = \exp^{-\sum_{\{\sigma\}} E/T}$ is defined in terms of the energy $E = -\varepsilon \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$, where the summation $\langle ij \rangle$ is over nearest neighbor sites on the lattice. This model has a high temperature disordered phase with the expectation value $\langle \sigma \rangle = 0$ and a low temperature ordered phase(with $\langle \sigma \rangle \neq 0$). The two phases are related by a duality of the model, and there is a 2nd order phase transition at the self-dual point. At the phase transition, typical configurations have fluctuations on all length scales, so the field theory describing the model at its critical point should be expected to be invariant at least under changes of scale.

Schur Polynomials of second order in Calogero-Sutherland Model and Conformal Field Theory

Abed Alkader A. Said, Moustafa Sayem eldaher

Department of Physics, Damascus University, Syria

Nour eddine Chair

Department of Physics, Jordan University,Jordan

Research Journal of Alepo University.B 92 (2013)-accepted at4.Dec.2013

Abstract

Partial differential eqauation is solved for Schur polynomials of second order. The relation between Calogero-Sutherland model and virasoro algebra is used to build the singular vectors in term of Schur polynomials of second order.it is proven that Schur functions are eigen functions of Calogero-Sutherland Hamiltonian. Also the rectangular shape of these singular vectors is proved by using of BRST Co homology.

Key words:, Schur Polynomials, Calogero-Sutherland Hamilton,Singular vector, Virasoro Algebra, hypergeometric functions

1. Introduction

The theory of Schur functions (and Schur polynomials) has been a vertiginous development on the computations of coefficients and combinatorial connectors about rectangular Schur functions

Calogero-Sutherland model and its generalizations are of great help in the understanding of quantum many-body physics. Moreover, the wave functions of these quantum integrable systems are typically given in terms of symmetric functions that are central in algebraic combinatorics (in the case of the Calogero-Sutherland model), the energy eigen functions involve the Jack polynomials. It would hence be of considerable interest to provide an algebraic description of these models and of the associated symmetric functions.

Singular vectors of the virasoro algebra attract a lot of attention because of its relationship with correlation functions. Conformal field theories are Euclidean quantum field theories, and characterized by the properties that their symmetry group contains in addition to the Eculidean symmetries, local conformal transformations .

Action of Laplace-BeltRami Hamiltonian on Schur polynomials in Conformal Field heory

Abed Alkader. A. Said, Moustafa Sayem eldaher

Department of Physics, Damascus University, Syria

Nour eddine Chair

Department of Physics, Jordan University, Jordan

Hadramout University Journal of Natural and Applied Sciences

Hadramout University Journal of Natural and Applied Sciences, B 10,N 2 **(Accepted** at . 27 Feb 2013)

Abstract

the action of Laplace-BeltRami operator on Fock space of symmetric Schur funcions is studied ,it is proved that Schur functions are eigen functions of Lapace-Beltrami operator. The relation between Calogero-Sutherland model and virasoro algebra is used to build the singular vectors in term of Schur polynomials. We proved the rectangular shape of these singular vectors by using of BRST Cohomology.

Key words: Laplace-Beltrami Hamiltonian, Schur Function, Calogero-Sutherland Model, Singular vector, Virasoro generators

1. Introduction

Integrable models may have very huge symmetries, that help us to study various behaviors of the systems. For some well investigated models, we are able to calculate correlation functions of observables by using representation theories of the symmetries, that have been fruitfully studied within the language of infinite dimensional Lie algebras and their suitable deformation theories. We have a lot of examples of these symmetry algebras and their applications to many problems, critical phenomena of two-dimensional classical statistical models, the low temperature behavior of one-dimensional electron systems and so on.

The Calogero-Sutherland model and its generalizations are of great help in the understanding of quantum many-body physics. Moreover, the wave functions of these quantum integrable systems are typically given in terms of symmetric functions that are central in algebraic combinatorics (in the case of the Calogero-Sutherland model), the energy eigen functions involve the Jack polynomials. It would hence be of considerable interest to provide an algebraic description of these models and of the associated symmetric functions.

Singular vectors in Term of Schur polynomials in Conformal Field Theory

Abed Alkader.A.said, Moustafa Sayem eldaher

department of physics. Damascus university.Syria
Nour eddein Chair
Department of Physics, Jordan University,Jordan

Hadramout University Journal of Natural and Applied Sciences

Hadramout University Journal of Natural and Applied Sciences, B 10,N 2 (Accepted at 22 march 2013)

Abstract

we extended the singular vectors in term of Schur polynomials to the states $(r,s)=(3,4),(4,4)$ *and proved the general case (r,s) for the coeffecients of the singular vector,we used the relation between Calogero-Sutherlan Model and conformal theory at central charge (c = 1) to prove the rectangular shape of singular vectors in our formula,also we construct another recursion relation to calculate the coefficients of the singular vector*.

Key words: Schur polynomials, Calogero-Sutherland Model,Conformal field theory, Laplace-Beltrami Hamiltonian, central charge, Singular vector, Virasoro generators**.**

1. Introduction

Singular vectors of the virasoro algebra attract a lot of attention because of its relationship with correlation functions. Conformal field theories are Euclidean quantum field theories,and characterised by the properties that their symmetry group contains inaddition to the Eculidean symmetries, local conformal transoformations which are of special importance in two dimensions and have an infinite number of conserved quantities ,in [2] they studied 2D gravity coupled to $c \leq 1$ conformal matter.

In [4],thay built a singular vector for c < 1 and put a formula in term of Schur polynomial. [7] studied the integral form of singular vectors in term of Jack polynomial for special cases.

The paper[8] calculate an explicit formula for singular vectors (c < 1) which can be write in term of Jack functions with rectangular young diagram.[6] used Jack polynomials to prove AGT conjecture at central charge(c = 1) . We extend the formula in [4] for the cases (r; s) = (3; 4); (4; 4); and prove this formula for the general case, (r; s); (s; r).We will use correspondence between Calogero-Sutherland model and conformal field theory to construct a recursion relation for the coefficients of the singular vectors.

2. Virasoro algebra

The Virasoro algebra generated by ($L_n, n \in z$) and the centeral charge c with relations:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \qquad (1)$$

as a representation space, we take Fock space F_p :

$$F = C[a_{-1}, a_{-2}, ...]|P>] \qquad (2)$$

we use the bosonic operators $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$, and the vacuum vector |p > is defined by:

$$a_0 | p >= p | p >, a_n | p >= 0, \forall n \in z \qquad (3)$$

then the bosonic representation of L_n is given as:

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{m\in z} : a_{n-m} a_m : -Q(n+1)a_n \qquad (4)$$

The central charge c is given by:

$$c = 1 - 12Q^2 \qquad (5)$$

The conformal dimension of the corresponding Virasoro representation is:

$$h = \frac{1}{2}(p(p-2Q) \qquad (6)$$

we denote the Feigin-Fuch module with $F(p,q)$, the cohomology of Virasoro algebra $\mu = F^M \otimes F^L$ is studied in [2] where M, L are matter sector and gravity sector.

We fix the matter central charge as in equation (5), the light cone combination is defined by:

$$Q_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^M \pm iQ^L)$$
$$\mathrm{P}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{P}^M + i\,\mathrm{P}^L) \qquad (7)$$

here P is the momenta and Q is the background charge, in term of two real parameters r, s:

$$r = \frac{-1}{2}Q - \mathrm{P}^+, s = \frac{-1}{2}Q + \mathrm{P}^- \qquad (8)$$

so the momenta can be parametrized as:

$$\mathrm{P}^{\mathrm{M}}_{(r,s)} = \tfrac{1}{2}[(r+s)Q^{\mathrm{M}} + (r-s)iQ^2] \qquad (9)$$

from equations (1, 2, 7,9) we can write the generators L_1, L_2 in the form:

$$L_1 = \sum_{j=1}^{\infty} jx_j \frac{d}{\partial x_{j+1}} + 2Q_+(P-Q)\frac{\partial}{\partial x_1}$$
$$L_2 = \sum jx_j \frac{d}{i\,\partial x_{j+2}} + 2Q_+(P-Q)\frac{\partial}{\partial x_2} + 2Q_+^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \qquad (10)$$

and from properties of Schur polynomials [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x_n} S_m(x) = S_{m-n}(x)$$
$$\sum_{l=i+1} (l-i) x_{l-i} S_{m-l}(x) = (m-i) S_{m-i}(x)$$
$$S_{k_1,\dots,k,k-1,\dots,k_n} = 0, S_{k_1,\dots,k,k-2,\dots,k_n}(x) = S_{k_1,\dots,k-1,k-1,\dots,k_n}(x) = 0$$
(12)

we have:

$$[L_1, S_m(x)] = [(m-1) + \sqrt{2} Q_+ (P-Q)] S_{m-1}(x)$$
$$[L_2, S_m(x)] = [(m-1) + \sqrt{2} Q_+ (P-Q)] S_{m-2}(x) \qquad (13)$$

The background charges Q^M can be obtained by special rotation $SO(2,C)$ in (p; q) model, ($Q^M = \frac{p-q}{\sqrt{2pq}}$), also the discrete momenta $p(r,s) = P(p,q)\frac{(r-s)}{\sqrt{2}}$.

Now for the case $r,s \in N, c^M = 1$, free field where ($Q^M = 0$) the singular vector at level k = rs in term of Schur polynomials, also see [2]:

$$\upsilon_{r,s} = S_{s^r}\left(\frac{\sqrt{2}}{n} P_{-n}^M\right) | P^M > \qquad (14)$$

where the coefficient can be obtained by applying the Virasoro generators:

$$L_n = 0, \forall n \geq 0 \qquad (15)$$

and the Schur polynomails have ordered partitions in young tabluax:

$$|k| = k_1 + k_2 + \dots\dots + k_r$$
$$k_1 \geq k_2 \geq \dots\dots \geq 0$$

note that equation (14), has a rectangular diagram and we will confirm it by applying (CSM) at $\beta = 1$. While for $c < 1$, and by changing coordinates in term of momenta and from equation (13), according to single raw(column) we have:

$$\upsilon_{1,s} = S_s\left(\frac{\sqrt{2}}{n} Q_+ P_{-n}^M\right) | P^M >$$
$$\upsilon_{r,1} = S_r\left(\frac{\sqrt{2}}{n} Q_- P_{-n}^M\right) | P^M > \qquad (16)$$

For r; s > 1 we use $\sqrt{2} Q_+ (P-Q) = t+1$ in equation (13), the cases (2; 3); (3; 3) in [2,4].

3. Extended states $(r,s) = (3,4), (4,3), (4,4)$

Now for the case r = 3, s = 4 , k=12 , $t = 2Q_+^2 - 4$ and after all permutation with lexographical order the singular vector has the form:

$$\upsilon_{3,4} = \sum_{\substack{12 \geq k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 0 \\ k_1+k_2+k_3=12}} \alpha_{k_2,k_3}^{12} S_{k_1-k_2-k_3,k_2,k_3}\left(\frac{\sqrt{2}}{n} Q_+ P_{-n}^M\right) | P^M > \qquad (17)$$

with manual calculations we have the coefficiens $\alpha^{12}_{k_2,k_3}$ in term of $\alpha^{12}_{0,0}$:
and some of them are:

$$\alpha^{12}_{1,0} = -\frac{(t+12)}{t}\alpha^{12}_{0,0}, \alpha^{12}_{1,1} = \frac{(t+12)(t+8)}{t(t-4)}\alpha^{12}_{0,0}$$

$$\alpha^{12}_{2,1} = -\frac{(t+12)(t+10)(t+8)}{t(t+1)(t-4)}\alpha^{12}_{0,0}, \alpha^{12}_{2,0} = \frac{36(t+12)}{t(t+1)(t-4)}\alpha^{12}_{0,0}$$

$$\alpha^{12}_{3,0} = \frac{(t+12)(t+10)(t^2+7t+28)}{t(t+1)(t+2)(t-4)}\alpha^{12}_{0,0}$$

$$\alpha^{12}_{2,2} = \frac{(t+12)(t+10)(t+8)(t+7)}{t(t+1)(t+2)(t-4)}\alpha^{12}_{0,0}$$

$$\alpha^{12}_{6,0} = \frac{3(t+12)(t+10)(t+8)(t+7)(t+5)(t^2+16t+40)}{t(t+1)(t-2)(t-4)}\alpha^{12}_{0,0}$$

....

$$\alpha^{12}_{3,3} = \frac{(t+12)(t+10)(t+8)(t+7)(t+6)(t+8)}{t(t+1)(t+2)(t-4)(t-2)(t+2)}\alpha^{12}_{0,0}$$

to avoid singularities in the terms we use:

$$\alpha^{12}_{0,0} = \frac{1}{t\Gamma(13+t)\Gamma(t)\Gamma(t-1)}$$

with some algebra we have:

$$\alpha^{12}_{\kappa_2,\kappa_3}(Q_+) = \frac{(-1)^{\kappa_2,\kappa_3}\alpha_{\kappa_2,\kappa_3}}{t\Gamma(12-\kappa_2-\kappa_3+t+1)\Gamma(\kappa_2+t)\Gamma(\kappa_3+t-1)} \tag{18}$$

and some α_{k_2,k_3} are:

$$\alpha_{1,0} = (t-2)(t-4)(t+2)(t+9)(t+11), \alpha_{2,0} = -36(t-2)(t+2)(t+9)$$

$$\alpha_{1,1} = (t-1)(t-2)(t+2)(t+8)(t+9), \alpha_{2,2} = \alpha_{3,2} = (t-1)(t+7)(t+8)$$

....

$$\alpha_{6,0} = 3(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)(t^2+16+40)$$

For

$$\upsilon_{4,3} = \sum_{\substack{12\ge k_1\ge k_2\ge k_3\ge k_4\ge 0 \\ k_1+k_2+k_3+k_4=12}} \alpha^{12}_{k_1,k_2,k_3,k_4} S_{\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4}\left(\frac{\sqrt{2}}{n}Q_+P_{-n}\right)|P^M> \tag{19}$$

some of the coefficiens in term of $\alpha^{12}_{12,0,0,0}$ are:

$$\alpha^{12}_{11,1,0,0} = -\frac{t+12}{t}\alpha^{12}_{12,0,0,0}$$

$$\alpha^{12}_{10,1,1,0} = \frac{6\left(t+12\right)(t-3)}{t(t+1)(2t-3)}\alpha^{12}_{12,0,0,0}$$

$$\alpha^{12}_{10,2,0,0} = \frac{6\left(t+12\right)(t-3)}{t(t+1)(2t-3)}\alpha^{12}_{12,0,0,0}$$

$$\alpha^{12}_{19,3,0,0} = \frac{6\left(t+12\right)(t^3+17t^2+32t+60)}{t(t+1)(t+2)(2t-3(t-6))}\alpha^{12}_{12,0,0,0}$$

....

$$\alpha^{12}_{9,1,1,1} = \frac{\left(t+12\right)(t+6)(4t+60)}{t(t+1)(2t-3)}\alpha^{12}_{12,0,0,0}$$

....

We have :

$$\alpha^{12}_{k_1,k_2,k_3,k_4} = \frac{(-1)^{k_1}\alpha_{k_1,k_2,k_3,k_4}}{t\Gamma\left(12-k_2-k_3-k_4+t+1\right)\Gamma(k_2+t)\Gamma(k_3+t-1)\Gamma(k_4+t-2)}$$

also the coefficiens α_{k_1,k_2,k_3,k_4} obey recurssion relation (22) and some of them are:

$$\alpha_{12,0,0,0}, \alpha_{11,1,0,0} = (t+9)(t+10)(t+11)(2t-3)(t-6)$$

$$\alpha_{10,2,0,0}(t+9)(t+10)(2t+15)(t-6)(t-1)$$

in the level s = r = 4 , become more complicated and after permutations of ordered partitions with the effect of L_1, L_2 we have:

$$\upsilon_{4,4} = \sum_{16\ge k_1\ge k_2\ge k_3\ge k_4\ge 0} {}^{(-1)^{k_1}}\alpha^{16}_{k_1,k_2,k_3,k_4}\left(Q_+\right)S_{k_1,k_2,k_3,k_4}\left(\frac{\sqrt{2}}{n}Q_+P_n^M\right)|P> \qquad (20)$$

and

$$\alpha^{16}_{k_1,k_2,k_3,k_4} = \frac{(-1)^{k_1}\alpha_{k_1,k_2,k_3,k_4}}{t\Gamma\left(k_1+t+1\right)\Gamma(k_2+t)\Gamma(k_3+t-1)\Gamma(k_4+t-2)} \qquad (21)$$

by the action of L_1, L_2 on $\upsilon_{4,4}$,and after long algebra we calculate all $\alpha^{16}_{k_1,k_2,k_3,k_4}$,the first coefficients are :

$$\alpha^{16}_{14,2,0,0} = \frac{(3t-115)}{t(t+1)(2t-4)}\alpha^{16}_{16,0,0,0}$$

$\alpha^{16}_{0,0,0,0}$ appears in all coefficients ,so to avoid divergence in these coefficients we choose

$$\alpha^{16}_{0,0,0,0} = \frac{(2t-9)(t+15)}{\Gamma(t+15)\Gamma(t+2)\Gamma(t-1)\Gamma(t-2)}$$

$$\alpha^{16}_{14,1,1,0} = \frac{2(t+16)(t+10)}{t(2t-9)} \alpha^{16}_{16,0,0,0} = \frac{2(t-1)(t+10)}{\Gamma(t+15)\Gamma(t+2)\Gamma(t-1)\Gamma(t-2)}$$

$$\alpha^{16}_{15,1,0,0} = \frac{(2t-9)(t+15)}{\Gamma(t+16)\Gamma(t+1)\Gamma(t-1)\Gamma(t-2)}$$

$$\alpha^{16}_{13,2,1,0} = \frac{(2t-9)(t+15)}{\Gamma(t+14)\Gamma(t+2)\Gamma(t)\Gamma(t-2)}$$

where α_{k_1,k_2,k_3,k_4} are given in term of t and some of them:

$$\alpha_{16,0,0,0} = \alpha_{15,1,0,0} = (2t-9)(t-8)(t+15)(t+14)$$

$$\alpha_{14,2,0,0} = (12t-115)(t+14)(t-8)$$

$$\alpha_{13,2,1,0} = \frac{2}{3}(t-1)(2t^4+34t^3+70t^2+1415t+5610)$$

these coefficients obey the relation:

$$\alpha_{k_1,\ldots\ldots,k_r} = \sum_{i=2}^{r} \alpha_{k_1-1,\ldots\ldots,k_j+1,\ldots\ldots\ldots,k_r} \tag{22}$$

from the action of L_1, L_2. Note for c < 1, $t+1=\sqrt{2}Q_+(P(4,4)-Q^M)=3Q_+^2-3$, and for c = 1, t = 0, p = q = 1, all coefficients vanish expect $\alpha^{16}_{4,4,4,4}$

4. Singular vectors at rs level

At level k = rs, the singular vector has the form:

$$\upsilon_{r,s} = \sum \frac{(-1)^{k_1} \alpha_{k_1,\ldots\ldots\ldots,k_r}(Q_+)}{\Gamma(k_1+t+1)\ldots\ldots\ldots\Gamma(k_r+t-r+2)} S_{k_1,k_2,\ldots\ldots\ldots,k_r}\left(\frac{\sqrt{2}}{n}Q_+P^M_{-n}\right)|P^M> \tag{23}$$

where $t+1=\sqrt{2}Q_+(P^M(r,s)-Q^M)$ and the coefficients $\alpha_{k_1,\ldots\ldots,k_r}$ from the action of L_1, L_2.

Proof. By induction,
if $\upsilon_{r,s}$ is true at somek, $k=1,2,\ldots\ldots,n$, then it ie true at level k + 1. But k has two variables r; s which are positive numbers, if we raise s to s + 1 and to keep the degenercy for the singular vector. We take $k'=r(s+1)$ so $k_1=k'-r$ for the equation (23), and level increases by r which distributes over all terms with ordered partitions. So:

$$\upsilon_{r,s+1} = \sum_{k_1=rs+r\geq rs+r-k_2'\ldots\ldots\geq k_1'\geq 0} \frac{(-1)^{k_1'} \alpha_{k_1',\ldots\ldots\ldots,k_r'}(Q_+)}{\Gamma(rs+r-k_2'-\ldots\ldots\ldots-k_r'+t+1)\ldots\ldots\Gamma(k_r'+t-r+2)} \tag{24}$$

$$\times S_{rs+r-k_2'-\ldots-k_r',k_2',\ldots,k_r'}(\sqrt{2}Q_+P^M_{-n})|P>$$

Put $k_1' = rs + r - k_2' - ...... - k_r'$ we have:

$$\upsilon_{r,s+1} = \sum_{k_1 \geq ....\geq k_r \geq 0} \frac{(-1)^{k_1'} \alpha_{k_1',......,k_r'} S_{k_1',.......,k_s'} \left(\frac{\sqrt{2}}{n} Q_- P_{-n}^M \right) | P >}{\Gamma(k_1' + t + 1)(k_2' + t).......\Gamma(k_s' + t - s + 2)}$$

Which is the same as equation (23).

Now in the negative part of oscillator $Q_{+\rightarrow} Q_-, t_+ \rightarrow t_-$, the level increases by s, put

$$\begin{aligned} & rs + s - k_2 - .... - k_s \geq k_2 \geq .... \geq k_s \\ & rs + s - k_2 - .... - k_s \geq k_2 \geq .... \geq k_s = k \end{aligned} \tag{25}$$

and the singular vector at this level has the form:

$$\upsilon_{r,s} = \sum_{rs+s=k \geq k_1 \geq ......\geq k_s} \frac{(-1)^{k_1} \alpha_{k_1,......,k_r} S_{k_1,.......,k_s} \left(\frac{\sqrt{2}}{n} Q_- P_{-n}^M \right) | P >}{\Gamma(k_1 + t + 1)(k_2 + t).......\Gamma(k_s + t - s + 2)} \tag{26}$$

For $(c = 1).q = p = 1, Q_+^2 = 1, t = r - s - 1$, all terms vanish except $\upsilon_{s,s,...,s} = S_{s^r} \,| P >$ which has a rectangular shape

Example:

$$\upsilon_{3,2} \sum_{6 \geq 6-l-i \geq l \geq i \geq 0} \alpha^6_{6-l-i,l,i} S_{6-l-i,l,i} \left(\frac{\sqrt{2}}{n} Q_+ P_{-n}^M \right) | P > \tag{27}$$

$$\alpha^6_{6,0,0} = \frac{(t+5)}{t\Gamma(7+t)\Gamma(t)\Gamma(t-1)}$$

$$\alpha^6_{5,1,0} = -\frac{(t+5)}{t\Gamma(6+t)\Gamma(t+1)\Gamma(t-1)}$$

$$\alpha^6_{4,2,0} = \frac{-(t+4)(t-1)}{\Gamma(5+t)\Gamma(t+2)\Gamma(t-1)}$$

$$\alpha^6_{4,1,1} = \frac{-(t+4)(t-1)}{\Gamma(5+t)\Gamma(t+1)\Gamma(t)}$$

$$\alpha^6_{3,3,0} = -\frac{(t^2+4t+1)}{\Gamma(4+t)\Gamma(t+3)\Gamma(t-1)}$$

$$\alpha^6_{6,2,1} = -\frac{(t+4)(t-1)}{\Gamma(4+t)\Gamma(t+2)\Gamma(t-1)}$$

$$\alpha^6_{2,2,2} = -\frac{(t+4)(t-1)}{\Gamma(3+t)\Gamma(t+2)\Gamma(t+1)}$$

and

$\alpha_{0,0} = \alpha_{1,0} = \alpha_{2,0} = t + 5$

$\alpha_{1,1} = \alpha_{2,1} = \alpha_{2,2} = -(t + 4)(t - 1)$

$\alpha_{2,3} = (t^2 + 4t + 1)$

which are the coefficients of Schur Functions at level 6 and three orderd partitions:

$S_{6,0,0}, S_{5,1,0}, S_{4,2,0}, S_{4,1,1}, S_{3,3,0}, S_{3,2,1}, S_{2,2,2}$

5 .The relation between Calogero-Sutherland Model and CFT at (c=1)

[8] studied the action of L_n operators and dealed with left word action on Jack polynomials, also rightword action gives the same results.
The generalized Laplace-Beltrami operator is Calogero-Sutherland Hamiltonian:

$$H = \frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i \frac{\partial}{\partial x_i})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j}) \qquad (28)$$

This hamiltonian acts on any symmetric function with orderd partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_i)$ whith eigen value $\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\lambda_i^2 + \lambda_i(N - 2i + 1)$

Now for CSM at $\beta = 1$ deals with Schur polynomials with (p, q) model $p = q = 1, \beta = \frac{p}{q}$,which is for free field theory at c = 1.
by using virasoro generators and Hiesenberg operators an , the hamiltonian takes the form [1]:

$$H' = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}L_n + (N - 2a_0)p' \qquad (29)$$

N_0 is the number of variables,the momentum $p_i = \sum_n a_{-n}a_n$

the singular vectors have rectangular shape diagram:
$\upsilon_{r,s} = S_{s^r}\,|A_{r,s}> = S_{\underbrace{s,s,\ldots,s}_{r}}\,|A_{r,s}>$

where $A_{r,s}$, is a state comes from changing Verma modula to Fock space.

$A_{r,s=\frac{1}{2}}(r - s)$

$L_0\,|A_{r,s}> = h_{r,s}\,|A_{r,s}>$

h is the conformal weight $h_{r,s} = \frac{1}{4}(r - s)^2$ so:

$h_{r,s} = \frac{1}{2}A_{r,s}^2$

by the action of L_1, L_2 , on this singular vector:

$$L_1 S_{s^r} \mid A_{(r,s)} >= \sqrt{2} rs A_{0,0} \mid S_{s^{r-1},s-1} >= 0$$
(30)
$A_{0,0} = A_{r-r,s-s} = 0$,means that we absract one box from the lower right corner of Young Diagram.

$$L_2 S_{s^r}(x) \mid A_{r,s} >= \sqrt{2} rs \left(\frac{(s-1)(r+1)}{2}\right) A_{0,0} \left(S_{s^{r-2},(s-2)} - S_{s^{r-2},(s-1)^2}\right) \mid A_{r,s} > \qquad (31)$$

Note that the singular vectors are not singular vectors in Calogero-Sutherland model (CSM), so when we act by the hamiltonian on the singular vector, the first term of the hamiltonian vanishes then:

$$H' \upsilon_{r,s} = (N_0 - 2a_0) p' \upsilon_{r,s}$$
(32)
for the second term:

$$a_0 \mid A_{rs} >= A_{rs} \mid A_{rs} >= \frac{1}{2}(r-s) \mid A_{rs} >$$
$$\sum_{n=1} a_{-n} a_n \mid A_{rs} >= N \mid A_{rs} >$$
$$\sum_{n=1} (N_0 - 2a_0) a_{-n} a_n \mid \upsilon_{rs} >= N(N - r + s) \mid A_{rs} >$$
$$N(N_0 - r + s) = \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i^2 + (N - 2i + 1)\lambda_i)$$

then for $\beta = 1$ the Fock space $F_{A_{r,s}}(r,s \in z_+)$ have singular vector of rectangular shape $S_{s^r}(\frac{\sqrt{2}}{n} P_{-n}^M) \mid A_{r,s} >$, which confirm our result.

For (c < 1) ,the first term in hamiltonian vanishes,the second term give us:

$$H' \upsilon_{r,s} = \sum_{\substack{k_1+k_2+..+k_r=rs \\ k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r \geq 0}} \sum_{i=1}^{r} (k_i^2 + (N - 2i + 1)k_i)(-1)^{k_1} \alpha^{rs}_{k_1,\ldots k_i,\ldots,k_r}(Q_+) \times S_{k_1,\ldots,k_i,\ldots,k_r}(\frac{\sqrt{2}}{n} P_{-n}^M) \mid P^M > \qquad (33)$$

which is another recursion relation to calculate the coefficients for the singular vector at any level.

conclusion:

we calculate the coefficiens for the singular vector at higher level $(\mathrm{rs} = 12, 16)$ and prove the general formula at any level by induction,for special case at central charge(c = 1),we use the relation between conformal field theory and Calogero-Sutherland model to prove the rectangular shape of the singular vector in term of Schur function,and construct a recursion relation to calculate these coefficients at minimal models (c < 1) . The singular vector at (c < 1) comes from the linear combination of all permutatioin for orderd Schur polynomials and it has a rectangular shape.

Appedix

The action of L_1, L_2 Virasoro generators in equation (10), can be derived from the definition of those generators equation (4), we prove equation (13):

$$L_1 = \sum_{j=1}^{\infty} jx_j \frac{d}{\partial x_{j+1}} + 2Q_+(P-Q)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$L_2 = \sum jx_j \frac{d}{i\,\partial x_{j+2}} + 2Q_+(P-Q)\frac{\partial}{\partial x_2} + 2Q_+^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \tag{34}$$

we correct the last term which must be devided by $\sqrt{2}$:

$$[L_1, S_k(x)]|P> = L_1 S_k(x)|P>$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} jx_j S_{k-j-1}(x) + \sqrt{2}Q_+(P-Q)S_{k-1}(x) \tag{35}$$

put j + 1 = m, and by the properties equation (34), we have:

$$[L_1, S_k] = [(k-1) + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]S_{k-1}(x) \tag{36}$$

Now for the action of L_2 :

$$L_2 = \sum_{j=1}^{\infty} jx_j \frac{dS_k(x)}{\partial x_{j+2}} + 2Q_+(P-Q)\frac{\partial}{\partial x_2} + 2Q_+^2 \frac{\partial^2 S_k(x)}{\partial x_1^2} \tag{37}$$

put m = j + 2, and also by equation (12):

$$[L_2, S_k] = \sum_{m=j+1} (m-2)x_{m-2}S_{k-2} + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]S_{k-2}(x)$$

$$= [(k-1) + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]S_{k-2}(x) \tag{38}$$

References

[1] Awata.H, Matsuo.Y, Odake.S and Shiraishi(1995),J, **Collective field theory, Calogero- Sutherland modeland generalized matrix models**, Phys. Lett. B347 pp 49-55.

[2] Bowknegt P. and MacCarthy J. and Pilch K.(1991), **BRST analysis of physical states for 2D gravity coupled to c < 1**, CERN-TH 6162/91, pp 347-379.

[3] Bowknegt P. and MacCarthy J. and Pilch K(1991)., CERN-TH 6279/91.

[4] Chair N. and Dobrev V. K. and Kanno H(1992)., **SO(2; c) invariant ring structure of BRST cohomology and singular vectors in 2D gravity with c < 1 matter**, Phys. Lett. B283, pp 194-202.

[5]] Macdonald. I.G(1995), **Symmetric functions and Hall polynomials**, 2nd edition, OxfordUniversity Press .

[6] Mironov.A, Morozov.A and Shakirov.Sh(2011),**A direct proof of AGT conjecture at $\beta = 1$,**JHEP 1102:067.

[7] Mimakhi K. and Yamada Y. (1995**), Singular vectors of the Virasoro algerba in terms of Jack polynomials,Commun**. Math. Phys. 174, pp 447 - 455.

[8] Sakamoto R. and Shiraishi J. and Arnaudon D. and Frappat L. and Ragoucy E. (2005**), Correspondense between conformal field theory and calogero-sutherland model**, Nucl. Phys. B704, pp 490 - 509.

[9] Stanley.R.P(1989), **Some combinatorial properties of Jack symmetric functions**, Adv. in Math. 77 pp 76-115.
[10] Wuxing Cai and Naihuan Sing.(30 May 2011), **Application of Laplace-Beltrami operator for Jack polynomials**, arXiv: 1101.5544[math QA]

.

الفصل الأول

Chapter 1

مقدمة عامة حول نظرية الحقل التوافقي والدوال المتناظرة

General Introduction About Conformal field theory and Symmetric Functions

1-1 نظرية الحقل التوافقي (Conformal Field Theory)

نظرية الحقل التوافقي (الكونفورمي)هي نظريات الحقل الكم ومي الاقليدي (Quantum Field Theories) التي تتميز بصفة التناظر لمحتويات المجموعة إضافة إلى التناظر الرياضي الاقليدي والمحتويات التوافقية المحلية (أي أنها تحفظ الزوايا) و نظرية الحقل التوافقي في بعدين تحتوي عدداً لانهائياً من الكميات الفيزيائية المحفوظة والتي يمكن حلها باستخدام التناظر وحده.

لقد تركز اهتمام علماء الفيزياء النظرية الحديثة على نظريات الحقل التو افقي منذ أن ارتبطت بالفيزياء النظرية ، وبدأت تشرح الظواهر وتلعب دورا مركزيا في نظرية الأوتار وهي في الوقت الحاضر واعدة ومرشحة لتلعب دورا مهما في نظرية التوحيد(Unifying Theory) لجميع القوى، كما أن لها تأثيراً رئيسياً في الرياضيات الحديثة خاصة في جبر المؤثرات الرأسية (Vertex Operator Algebra) والزمر المنتهية (Finite Group).

وكما في الحقل الكمومي الأصلي،فأن هذا يتطلب ثباتا توافقيا محدد(Conformal invariance) وبالتالي فإن كل الجسيمات كالاستثارات (Excitations) تكون عديمة الكتلة تقريباً في حدود الطاقة العالية لنظرية الحقل التوافقي في بعدين، كما

يعتقد أن مظاهر عديدة من تركيب النظرية البنائي لا يتغير في حالات التقريب، كما يتخلل العيب الشكلي لنظريات الحقل التوافقي التي تشرح النماذج ذات الكتلة المصمتة(Massive Models). [Gaberdiel and …(13).]

إن الاهتمامات الحالية في نظرية الحقل التوافقي ترجع إلى أصول مختلفة في وصف الميكانيكا الإحصائية.من خلال نظريات الحقل الكمومي الاقليدي فإن النظريات التوافقية تشرح النظام في النقاط الحرجة حيث يكون طول الترابط(correlation length) متباعداً،والذي يرتبط بالشعاع المنفرد(singular vector).والنظام البسيط الذي يحدث فيه هذا يسمى نموذج ايسنغ(Ising Model) وهو نموذج صيغ من خلال شبكية في بعدين، والتي تكون فيها المواقع تمثل ذرات لانهائية لبلورة في بعدين، وكل ذرة لها سبين(spin) يأخذ قيم ($\sigma = \pm 1$) ، والطاقة المغناطيسية للنظام تعطى بدلالة هذه القيم.

وإذا اعتبرنا النظام عند درجة حرارة محددة فإن المعدل الحراري يعطى بدلالة طول الترابط (correlation length) ودرجة الحرارة،والخصائص المغناطيسية تشتق من دالات الارتباط،والنظام يمتلك درجة حرارة حرجة عند ما يكون طول الترابط متباعداً.والنظرية المتصلة(Continuum theory) تصف دالة الارتباط لمسافات كبيرة بالمقارنة مع فراغات الشبكة، حيث تصبح عندها ذات ثبات قياسي (scale invariance)، وكل ثبات قياسي في الحقل الكمومي في بعدين يكون ذا ثبات توافقي فعلي،وهذا يقود إلى أن نموذج ايسنغ ذو تقدير تقريبي للنظام الحقيقي.

الحقل الثاني الذي تلعب فيه نظرية الحقل التوافقي دوراً كبيراً هو نظرية الأوتار(string theory) ،وفيها لا تعتبر الأشياء نقاطاً مادية- كما في نظرية الحقل الكمومي – ولكن كأوتار ذات بعد واحد ، وهذه الأوتار يمكن أن تكون حلقات مغلقة (C.S.T) أو ذات بداية ونهاية (O.S.T)وهي تتفاعل مع بعضها عن طريق انضمامها معاً أو تفرقها وانشقاق كل منها إلى اثنين وطريقة اهتزازها تحدد طبيعة

الجسيمات ،ونوع حاملات القوى كالفوتون (photon) أو الغرافيتون(graviton) أو الغليون(Gluon) أو z.وتتم دراسة التفاعلات بين هذه الأوتار من خلال الشعاع المنفرد الذي يصف كيفية ارتباطها ونوع التفاعل بين الحقول المتواجدة.

وبالمقارنة مع تجاذب الدقائق المادية ، حيث أنّ أي دقيقتين تقتربان من بعضهما إلى درجة كبيرة تحدث تباعدات (Divergences)عديدة في الحقل الكمومي العادي ،ولذلك فإن تفاعل الوتر أكثر انتشاراً ،والوتر لا يشبه الدقائق من حيث درجات الحرية، فهو له درجات حرية داخلية تصف طرقاً مختلفة لاهتزازه space–time) ،وهذه الاهتزازات تفسر كدقائق مادية تتواجد في عالم البعدين(World Sheet) ، والسطح ثنائي الأبعاد يجعل الأوتار تمتد منتشرةً خلال الزمان والمكان.

1-2 التحويلات الأساسية في نظرية الحقل التوافقي

(Basic transformations in conformal field theory) :

في الفيزياء الإحصائية، في نظرية الظاهرة الحرجة وعند نقاط انتقال الطور في الرتبة الثانية(Second Order Phase Transition)عرف مقياس التناظر العام واستخدم منذ سنين عديدة ، وفي النظرية المعيارية (Gauge Theory)والتي هي عند نقطة انتقال الطور في الرتبة الثانية ، هناك نظام فيزيائي يتكون من مجموعة من المؤثرات الأساسية { $\varphi(x)$ }،وله مقاييس أبعاد { Δ_i } (مرجع]

وتحت نطاق تحويلات في الفضاء :

حيث أن λ هي ثابت

والمؤثرات الأساسية تحول كالتالي :

$$\varphi_i\,(x) \longrightarrow \lambda^{\Delta_i}\,\varphi_i\,(\lambda x) \qquad (1\text{-}2)$$

و (Δ) تشير إلى البعد (dimension) فيما ستؤول إلى ما يسمى بالوزن التوافقي (conformal weight) وهذا بدوره يعادل الطاقة أو السبين حسب النموذج وهذا يعني أنه عند هذه التحويلات فأن دالات الارتباط (correlation functions) للمؤثرات الأساسية $\langle \varphi_1(x)\varphi_2(x).....\rangle$ لن تتغير ، وبشكل خاص فأن دالة الارتباط لنقطتين

$$<\varphi_i\,(x)\varphi_j\,(x)>=\frac{const}{|\,x_1-x_2\,|^{\Delta_i}} \qquad (1\text{-}3)$$

وثابت المعايرة عشوائي . ولذلك فـإن البعد Δ_i يمكن إيجاده، وهذا البعد الشاذ يختلف عن الأبعاد القانونية(canonical) للحقول الحرة غير المتفاعلة . وبشكل عام فإنه يكون في الظاهرة الحرجة بحيث أن المؤثرات (الحقول) تتفاعل بقوة بينها.

وهناك طرق تقريبية وعددية وتحليلية لحساب المعاملات الحرجة (القوى للمنفردات غير التحليلية في الطاقة المغناطيسية بالقرب من النقطة الحرجة . وتقوم على فكرة أن نظريات النقطة الحرجة لا تتغير عند التحويلات المحلية مثل ($1-2$) وأنه هناك شرط لدالات الارتباط لنقطتين وهو التعامد.

مع ملاحظة أننا نتكلم عن دالات الإرتباط التي يشكل الشعاع المنفرد الجزء الأساسي فيها ويستخدم في دراسة طول الترابط بين الجزيئات أو الذرات عند النقطة الحرجة وأثر تدفق الطاقة عند تلك النقطة .

والتناظر التوافقي كذلك يحدد الدالات لثلاث نقاط

$$< \varphi_1\varphi_2\varphi_3 >= \frac{const}{\left|x_{12}\right|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}\left|x_{13}\right|^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}\left|x_{23}\right|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}}$$

(1−4)

وكذلك للدالات الأعلى مع أنها غير محددة إلا أنها تتبع قيوداً محددةً.

والوضع يختلف بشكل واسع في النظريات ذات البعدين (Two Dimension) حيث أن التحويلات في الفضاء ذي البعدين واللانهائي تتعلق في نقاط في الفضاء:

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \tilde{z} = f(z) \\ z &= x_1 + ix_2, \tilde{z} = x_1 - ix_2 \end{aligned} \qquad (1-5)$$

حيث أن $f(z)$ دالة تحليلية في الإحداثيات العقدية . والمؤثرات (الحقول) الأساسية تصبح:

$$\varphi_i(z,\tilde{z}) \rightarrow (\lambda(x))^{\Delta_i}\varphi_i(f(z),\overline{f(z)}) \qquad (1-6)$$

حيث أن $\lambda(x)$ تعطى بالعلاقة:

$$\lambda(x) = \left|\frac{df(z)}{dz}\right| \qquad (1-7)$$

والنظريات التوافقية ذات البعدين طورت من قبل [بيلافين،بولياكوف و زامولوتشيكوف (3)].

والتناظر اللانهائي فيها يجعل النظريات محددة للحصول على وصف متكامل لطيف الحقول (المؤثرات) ، مثل البعد التوافقي ، وحساب دالات الارتباط واشتقاق المعاملات الجبرية للحقول (المؤثرات) .

ومؤثرات نظرية الحقل التوافقي $\varphi_{\Delta,\bar{\Delta}}(z,\bar{z})$ والتي تتحول في ظل تشوهات توافقية بحيث أنها تتعلق بتحويلات محلية :

$$\varphi_{\Delta,\bar{\Delta}}(z,\bar{z})$$

$$(1-8)$$

العنصر المتري (metric element) يعطى بالعلاقة:

$$dx^{\mu} \approx dz d\bar{z} \qquad (1\text{-}9)$$

والشكل المتناهي للتحويل أعلاه يكون :

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \tilde{z} = z + \alpha(z) \\ \bar{z} &\rightarrow \bar{\tilde{z}} = \bar{z} + \overline{\alpha(z)} \end{aligned} \qquad (1-10)$$

$$\begin{aligned} &\varphi_{\Delta,\bar{\Delta}}(z,\bar{z}) \rightarrow \tilde{\varphi}(\bar{z},\bar{\tilde{z}}) = \\ &\varphi(z,\bar{z}) + [\alpha(z)\partial_z + \alpha'(z)\Delta + \overline{\alpha(z)}\partial\bar{z} + \overline{\alpha'(z)}\bar{\Delta}]\varphi(z,\bar{z}) \end{aligned}$$

$$(1-11)$$

ويمكن اعتبار التحويلات التوافقية بافتراض أن النظرية تتكون في مستوى $(z,\bar{z})$ حول النقطة الأصل (z=0) ، وأن الدالة $\alpha(z)$ تحليلية والمعلومات الكاملة حول نظرية الحقل الكمومي للمؤثر (الحقل) $\varphi_i(z,\bar{z})$ موجودة في دالات الارتباط $\langle\varphi_1(z,\bar{z})\varphi_2(z,\bar{z}).........\rangle$،

[Dotsenko (9)]

ولكي يتم حساب دالات الارتباط يضاف مؤثر آخر هو موتّر الطاقة (energy tensor) $T(z,\bar{z})$ والذي هو عبارة عن كمية فيزيائية تصف الكثافة أو تدفق الطاقة أو الاندفاع في الفضاء الزماني والمكاني ويعتبر مصدر حقل الجاذبية في معادلات اينشتاين كما أن الكتلة تعتبر مصدر الجاذبية النيوتنية – والذي يتم توليده من تحويلات توافقية لدالة الارتباط بعد عمل تحويلات توافقية للحقل في التكامل الاقتراني (Functional Integral) وذلك لأن هذه التغيرات للحقل لا تغير قيمة الاقتران، والمتطابقة تأخذ الشكل.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c d\,\varepsilon[\alpha(\varepsilon)<T_{ZZ}(\varepsilon,\bar{\varepsilon})\varphi_1\varphi_2....>+\overline{\alpha}(\varepsilon)<T_{\bar{z}\bar{z}}\,\varphi(\varepsilon,\bar{\varepsilon})\varphi_1\varphi_2....>$$
$$-\oint_c d\,\bar{\varepsilon}[\overline{\alpha(\varepsilon)}<T_{\bar{Z}\bar{Z}}\varphi_1\varphi_2....>+\alpha(\varepsilon)<T_{Z\bar{Z}}\varphi_1\varphi_2....>]$$
$$=\sum_i[\alpha(z_i)\partial_i+\alpha'(z_i)\Delta_i+\overline{\alpha(z_i)}\bar{\partial}_i+\overline{\alpha'(z_i)}\bar{\Delta}_i]<\varphi_1\varphi_2....>$$

(1−12)

والتكامل على المسار المغلق c ،وتحت هذه التحويلات يدخل المؤثر إلى النظرية

$$T_{\mu\nu}=\{T_{zz},T_{z\bar{z}},T_{\bar{z}z},T_{\bar{z}\bar{z}}\} \qquad (1\text{-}13)$$

من الثبات التوافقي للنظرية يبقى الحد الأول من الجهة اليسرى للمتطابقة.ولقيم خاصة لـ $\alpha(z)$ مثل:

و(1−14)

$$\alpha(z) = a(z - z_0)$$

فإن هذه الحالات الخاصة تعطي قوانين حفظ الطاقة من المعادلة (1−13) بحيث أن :

$$\begin{aligned} &\partial_{\bar{z}} < T_{zz}(z, \bar{z})\varphi_1\varphi_2 \ldots\ldots >= 0 \\ &< T_{\bar{z}z}(z, \bar{z})\varphi_1\varphi_2 \ldots\ldots >= 0 \end{aligned} \qquad (1-15)$$

وهذا يعطي:

$$T_{\bar{z}z} = 0 \qquad (1\text{-}16)$$

وتصبح المتطابقة :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\oint_c d\varepsilon[\alpha(\varepsilon) < T_{ZZ}(\varepsilon, \bar{\varepsilon})\varphi_1\varphi_2 \ldots . >] = \\ &\sum_i (\alpha(z_i)\partial_i + \alpha'(z_i)\Delta_i) < \varphi_1\varphi_2 \ldots .. > \end{aligned} \qquad (1-17)$$

وتنخفض المتطابقة إلى بعد واحد بدلا من بعدين ويمكن استبدال الطرف الأيمن بتكاملات كنتورية .

$$dz\,\alpha(z) < T_z(z)\varphi_1\varphi_2.... >=$$
$$\sum_i \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_i} dz\,\alpha(z)\left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2}+\frac{1}{z-z_i}\partial_i\right) < \varphi_1\varphi_2.... >$$

(1−18)

وبما أن $\alpha(z)$ هي دالة عامة فإن هذا يؤدي إلى المتطابقة :

$$< T_z(z)\varphi_1\varphi_2.... >=$$
$$\sum_i \left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2}+\frac{1}{z-z_i}\partial_i\right) < \varphi_1\varphi_2.... >$$

(1−19)

وهذه هي العلاقة الأساسية في نظرية الحقل التوافقي وكل العلاقات الأخرى تتبعها.

وبالإضافة إلى المؤثرات الأساسية $\{\varphi_i\}$ و موتّر الطاقة فإن مؤثرا جديدا ينتج من $T(z)\varphi_1(z_1)$

$$T(z)\varphi_1(z_1)=\frac{\Delta_1}{(z-z_1)^2}\varphi_1(z_1)+\frac{1}{z-z_1}\partial_1\varphi_1(z_1)$$
$$+\varphi^{(-2)}(z_1)+(z-z_1)\varphi^{(-3)}(z_1)+..............$$

(1−20)

وينتج من نشر المعاملات في هذه السلسلة $n \geq 2$ دالات ارتباط جديدة $\{\varphi_1^{-2}(z_1),\varphi_1^{-3}(z_1),.....\}$.

ومن علاقة موتّر الطاقة مع مولدات فيراسورو

$$T(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{L_n(z)}{(z-z_i)^{n+2}} \qquad (1-21)$$

حيث أن L_n هي مولدات جبر فيراسورو (Virasoro Generators) للحقول المشتقة من الحقل الأصلي وتمثل من خلال مؤثرات هايزنبرغ للخلق والإفناء

$a_{-n}\uparrow, a_n\downarrow$ ، $[a_n, a_m]=n\delta_{n,m}$

ومن تطبيق L_n على الحقل الأصلي

$$\begin{aligned}
&\varphi_i^{-n}(z_1)=L_{-n}(z_1)\varphi(z_1)\\
&L_n(z_1)\varphi(z_1)=\mathrm{O}\\
&L_o(z_1)\varphi(z_1)=\Delta\varphi(z_1)\\
&L_{-1}(z_1)\varphi(z_1)=\partial_1\varphi(z_1)
\end{aligned} \qquad (1-22)$$

كذلك

$$T\varphi_\Delta \rightarrow \{\varphi_\Delta^{(-n)}L_{-n}\varphi_\Delta : n\geq 2\} \qquad (1-23)$$

والمؤثرات الأساسية $\{\varphi_i\}$ هي حقول أساسية ونحصل عليهاعند تطبيق $T(\varphi)$ على مؤثرات جديدة لها خصائص التحويلات التوافقية وعند تطبيقها على أنظمة فيزيائية يصبح لها مشاهدات مثل السبين أو الطاقة . والبعد التوافقي Δ قد يعرف المغناطيسية أو معاملات حرارية ولذلك فـإن حقول لا نهائية $\varphi_\Delta^{(-n_1,n_2,....)}$ تنتج من الحقل الأساسي φ_Δ

$$\varphi_\Delta^{(n_1,n_2,...,n_k)}=L_{-n_1}L_{-n_{2.}}...L_{-n_k}\varphi_\Delta(z_1) \qquad (1-24)$$

مع ملاحظة أن التحويلات التوافقية لمشتقات الحقول تختلف عنها للحقول الأساسية φ_Δ ولا تحقق الشرط $L_n\varphi = 0, n > 0$

ويمكن كتابة $L_n\varphi$ بشكل تكامل كنتوري

$$L_n\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2} d_\varepsilon (\varepsilon - z)^{(n+1)} \mathrm{T}(\varepsilon)\varphi(z) \qquad (1\text{–}25)$$

وبعد إجراء العلاقة التبادلية بين مؤثرين لموتّر الطاقة وإجراء عمليات حسابية يدوية نحصل على العلاقة الرئيسية في جبر فيراسورو:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{n(n^2-1)c}{12}\delta_{n+m,0} \qquad (1\text{-}26)$$

وهذه العلاقة هي جبر فيراسورو (Virasoro Algebra) الذي سنتعرف عليه لاحقاً، و (c)هو ثابت ويسمى الشحنة المركزية(central charge) ومقدار هذا الثابت يعتمد على النموذج الذي يتم التعامل معه فهو يساوي($\frac{1}{2}$) في نموذج ايسنغ و (26)في النموذج الحرج ويبين نوع التفاعل بين الحقول المختلفة .

ان ظهور (c) حقيقةً ناجم عن كسر تناظر صمود القياس (scale ivariance) من خلال ادخال مقياس ما على النظرية ، علاوةً ذلك تظهر (c) عند معالجة نظريات حقول على متنوعات (manifold) منحنية حيث تكون دلالةً على الشذوذية في اثر موتّر الطاقة –الاندفاع .

والمعادلة أعلاه يتم الحصول عليها من المتطابقة التي تحتوي على اثنين من موتّر الطاقة .

$$<T(z)T(z')\varphi_1\varphi_2.......>=$$
$$\frac{c/2}{(z-z')^4}<\varphi_1\varphi_2.....>+(\frac{2}{(z-z')^2}+\frac{1}{z-z'}\partial_z)<T(z')\varphi_1\varphi_2....>$$
$$+\sum_i\frac{\Delta_i}{(z-z_i')}+\frac{1}{(z-z_i')}\partial_{z_i}:<T(z')\varphi_1\varphi_2....>$$

(1−27)

والحد الأول يتم الحصول عليه من دالة الارتباط لنقطتين:

$$<T(z)T(\bar{z})>=\frac{c/2}{(z-\bar{z})}+....$$

(1−28)

إنّ ظهور الحد $\frac{c/2}{(z-\bar{z})}$ وعدم ظهور الحد الذي على الشكل $\frac{T(z)}{(z-\bar{z})^3}$ نتج عن معدل موترين للطاقة .ولمناقشة خصائص ابعد للمؤثر التفاضلي نستخدم العلاقة التبادلية لـ L_n لتوليد أكبر عدد ممكن من المؤثرات .

$$L_n\varphi_\Delta=0 \qquad (1-29)$$

المؤثر L_n يعرف عند النقطة$(z=o)$ ويؤثر على جميع الحقول داخل دالات الارتباط لأن المسار المغلق c يحيط بجميع النقاط.ويشرح الطيف الكلي للحقول في نظرية الحقل التوافقي بسبب تواجد مؤثرات (حقول) أساسية $\{\varphi_{\Delta_i}\}$ ، والمؤثرات التفاضلية $\{\varphi_\Delta^{-n}\}$ هي حالات فيزيائية تم بناؤها من الحقل الأساسي .

موتّر الطاقة $T(z)$ يصنف ضمن هذه العائلة كمؤثر من الرتبة الثانية لمؤثر الوحدة.

$$\varphi_{\Delta=0}(z)=I=const \qquad (1-30)$$

إن $\varphi_{\Delta=0}$ تمثل مؤثر الوحدة

$$L_n\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_z} d\zeta(\zeta - z)^{n+1}\mathrm{T}(z)\varphi(z) \qquad (1-31)$$

$$\mathrm{I}^{-2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_z} d\zeta(\zeta - z)^{-1}\mathrm{T}(z)\mathrm{I} = \mathrm{T}(z) \qquad (1-32)$$

ومن معرفة أن مولدات فيراسورو تتعلق بمجموعة لا نهائية من المولدات للتحويلات التوافقية .وأن استخدامها يحدد النظرية وبالتالي يعرّف جميع دالات الارتباط.

لدينا عدد لا نهائي من المولدات $\{L_n\}$ وبوجود معادلات شرطية لها عند تطبيقها على الحقول الأساسية والعائلة من المؤثرات $L_{-n_1}......L_{-n_k}\varphi$ يمكن أن تنظم في مستويات:

في المستوى الأول .

$$L_{-1}\varphi = \partial_z\varphi \qquad (1-33)$$

والشرط يصبح:

$$L_{-1}\varphi_{\Delta=0} = 0 \qquad (1-34)$$

والذي يقود إلى مؤثر الوحدة $\mathrm{I} = \varphi_{\Delta=0}$

في المستوى الثاني لدينا مؤثران $L_{-1}^{2}\varphi_{\Delta}, L_{-2}\varphi_{\Delta}$. ومن الشرط على φ_{Δ} يتكون لدينا معادلة :

$$L_{-2}\varphi + aL_{-1}^{2}\varphi = o \qquad (1-35)$$

والتي لها نفس البعد وإلا فإن التناظر سوف ينكسر . المؤثر في الجهة اليسرى من المعادلة (1.35) توافقي مثل المؤثر الأساسي φ_{Δ} بخصائص التحويل التوافقي (1.8) . ولذلك فأن المعادلة تتحقق بدون كسر التناظر.

ومن تطبيق الشرط (1.29) فأننا نحصل على :

$$\begin{aligned} L_{1}(L_{-2}\varphi + L_{-1}^{2}\varphi) = 0 \\ L_{2}(L_{-2}\varphi + L_{-1}^{2}\varphi) = 0 \end{aligned} \qquad (1-36)$$

وباستخدام العلاقة التبادلية (1-27) نحصل على :

$$\begin{aligned} a &= \frac{-3}{2(2\Delta + 10} \\ c &= \frac{2\Delta(5-8\Delta)}{(2\Delta+1)} \end{aligned} \qquad (1-37)$$

حيث أن c هي الشحنة المركزية وفي النظرية تأخذ مقداراً محددا .ولذلك فأن المعادلة (1-37) تعرف البعد Δ .وبالنسبة للمؤثر φ_{Δ} مع مقدار Δ فأنه يمكننا أن نشترط المعادلة المقيدة :

$$L_{-2}\varphi - \frac{3}{2(2\Delta+1)}L_{-1}^{2}\varphi = 0 \qquad (1-38)$$

و تطبيق متطلبات مشابهة على المستوى الأول $(1-34)$ يؤدي إلى $\Delta = 0, \varphi_{\Delta} = I$
.ولذلك فإن المعادلة $(1-38)$ تتضمن دالة الارتباط لهذا المؤثر الخاص.وبوجود مؤثرات أخرى نتحقق المعادلات التفاضلية وبطريقة مباشرة مثل القيود الموجودة في المعادلة $(1-38)$.

3-1 النظام الفيرميوني والنظام البوزوني(Fermionic and Bosonic system) :

يتم التعامل مع الجسيمات في الميكانيكا الإحصائية حسب السبين فإن كان عدداً فردياً من مضاعفات ($\frac{1}{2}$) يصنف على أنه فيرميون ويخضع لإحصاء فيرمي، وأما إن كان السبين عدداً زوجياً من مضاعفات ($\frac{1}{2}$) فيتم تصنيفه على أنه بوزون ويخضع لإحصاء بوز.

أ -الفيرميونات:

جسيمات لها سبين يساوي نصف عدد صحيح فردي وتخضع لمبدأ بأولي للاستثناء والذي ينصّ على استحالة امتلاك فيرميونات لنفس الحالة الكمومية ومن صفتها عدم التناظر لحالات الجسيمات العديدة تحت تغيير أي اثنين منها وعند دراسة الميكانيكا الكمومية للفيرميونات يستخدم مؤثران احدهما رافع والآخر خافض مثل $a\downarrow, a^{+}\uparrow$ على الترتيب للانتقال بين حالات الطاقة المتباينة في فضاء فوك . وهذه المؤثرات تخضع للعلاقات عكس التبادلية (anticommutation relation) التالية :

$$\{a, a^{+}\} = 1 \qquad (1-39)$$

$$\{a, a\} = \{a^{+}, a^{+}\} = 0 \qquad (1-40)$$

ومن العلاقات السابقة يمكن تعريف الفضاء الفيرميوني بالشكل :

$$a\,|\,0>=0$$
$$a^{+}\,|\,0>=|1> \qquad (1-41)$$

ولذلك فإن الفضاء الفيرميوني يحتوي على مستويين من مستويات الطاقة هي الحالة الأرضية وحالة أخرى.

يعرف الهاملتون H للنظام الفيرميوني بدلالة رقم المؤثر (Operator number) $N=a^{+}a$ كما يلي: $H_f=\hbar\omega(N-\frac{1}{2})$

وتعتبر الالكترونات والبروتونات والجسيمات المركبة التي تتكون من عدد فردي من المكونات الأولية أمثلة على الفيرميونات.

ب - **البوزونات:**

هي جسيمات تمتلك سبين يساوي عدد صحيح ، كما أنها لا تخضع لمبدأ بأولي للاستثناء – حيث أنه يمكن أن يتواجد أي عدد من البوزونات في حالة كمية واحدة.

نتعامل مع البوزونات في ميك انيكا الكم من خلال مؤثرين احدهما رافع والآخر خافض ويرمز لهما على الترتيب b,b^{+} .ويرتبط المؤثر ان بالعلاقة التبادلية (commutation relation) التالية:

$$[b,b]=0$$
$$[b^{+},b^{+}]=0 \qquad (1-42)$$

ولإيجاد أي من مستويات الطاقة المختلفة في الفضاء البوزوني نستخدم التأثيرات التالية:

$$b\,|0>=0$$

$$\frac{(b^{+})^{n}}{\sqrt{n\,!}}\,|0>=|n> \qquad (1-43)$$

ومنها نجد أن الفضاء البوزوني يحتوي على عدد هائل من مستويات الطاقة حسب عدد المرات التي يطبق فيها المؤثر الرافع b^{+} .

ويعرف الهاملتون للنظام البوزوني كما يلي:

$$H_{b}=\hbar\omega(b^{+}b+\frac{1}{2}) \qquad (1-44)$$

ويصبح مقدار الطاقة للمستوى n بدلالة رقم المؤثر $N=b^{+}b$:

$$H_{b}=\hbar\omega(n+\frac{1}{2}) \qquad (1-45)$$

$$n=1,2,........$$

وتعتبر الفوتونات وجسيمات الفا والجسيمات المركبة التي تكون من عدد زوجي من المكونات الأولية أمثلة على البوزونات

1-4 التجزئة(partition):

تجزئة أي عدد صحيح $n \geq 1$ هي متتالية منتهية مثل $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ بحيث أن $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_m$ ، ومجموع هذه الأعداد يساوي n :

$$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = n \qquad (1\text{-}46)$$

، والاقتران الذي يعطي عدد التجزئات الممكنة لعدد صحيح موجب مثل n فيسمى باقتران التجزئة (partition function) ويشار إليه بالرمز $p(n)$.

و مثال على ذلك : $n = 5$

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4+1 \\ &= 3+2 \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

وعدد التجزئات للعدد (5) يكون $p(5) = 7$

ما يهمنا هنا ما يسمى بالتجزئة المرتبة (ordered partition) ، وتستخدم التجزئة لتمثيل الاقترانات المتناظرة عند أي درجة.

ولتوضيح المفهوم نعطي الأمثلة التالية:

تجزئة العدد 5 والذي يمثل اقتران من الدرجة الخامسة هي

$$\{(5), (4,1), (3,2), (3,1,1)(2,2,1), (2,1,1,1), (1,1,1,1,1)\}$$

تجزئة العدد 4 هي

$$\{(4),(3,1),(2,2),(2,1,1),(1,1,1,1)\}$$

والتجزئة المكررة يشار إليها برقم يبين عدد مرات التكرار التي تحصل مثال عليها

$$(65533222) = 65^2 3^2 2^3$$

وتمثل التجزئة لأي عدد باستخدام النقاط أو مربعات فيما يسمى جدول يونغ(Young Tableau)المرتب تنازلياً،ونعطي مثال على ذلك في الجزء التالي.

5-1 جدول يونغ والتناظر(Young tableau and symmetry):

أوجد يونغ(Young) طريقة لتمثيل زمرة متناظرة مثل S_n وتحتوي n من العناصر باستخدام التباديل المتناظرة وتبين أن هذه الطريقة وحيدة في حالة التمثيل الأصغر للزمر وسميت فيما بعد باسم جدول يونغ (Young tableaux)

وجدول يونغ للتجزئة($\lambda = \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$) لـ n يمثل بصفوف عددها m تحتوي أو خلايا أو نقاط أو مربعات بحيث أن الصف i يظهر فيه λ_i منها.

مثال: للزمرة S_4 هناك خمسة أشكال لتجزئة:

(4) . . . .

(31) . . .
.

(22) . .
. .

(211) . .
.
.

(1111) .
.
.
.

مع ملاحظة أن :

$$(4) \geq (31) \geq (22) \geq (211) \geq (1111)$$

والتجزئة المرافقة (conjugate) للزمرة S_4 تتشكل من خلال تبديل الصفوف بالأعمدة وكمثال عليها:

$\overline{31} = 211$

. .
.
.

وكذلك لبقية التجزئات.

1-10 الزمر التناظرية (symmetric groups) :

زمرة التناظر العامة Γ_n والتي تتركب من كل التباديل لعدد(n)من العناصر تلعب دورا عجيبا في نظرية التم ثيل . وهذه الزمرة موجودة كأرضية للعديد من المسائل الفيزيائية. وترتبط مع الدوران والزمر التي تتصف بالوحدوية (unitary group) لأن التمثيل غير القابل للتخفيض في هذه ال زمرة يمكن أن يبنى من خلال ضرب العناصر الابتدائية ودراسة السلوك الناتج تحت تباديل العناصر.

ومن التطبيقات الفيزيائية عليها إحصاء فيرمي أو إحصاء بوز حيث أن الدالّة الموجية الكلية إما أن تكون متناظرة أو غير متناظرة ولكن هذا يحدث عندما تبنى الدالّة الموجية من دالّات أخرى تصف إحداثيات الموقع ،إحداثيات السبين ودرجات الحرية. ومن الأمثلة على الزمر الخاصة Γ_3 التي توضح تركيب الذرات وتركيب النواة [(10) Elliott, Dawber] .

1-11 الإقترانات المتناظرة (Symmetric Functions):

الإقترانات المتناظرة لعدد k من المتغيرات x_i بحيث أنه لا يتغير عند إجراء أي تباديل بين المتغيرات . ست من الإقترانات المتناظرة الكلاسيكية لها أهمية خاصة في إنشاء اقترانات جديدة يمكن التعبير عنها على شكل محددات(Determinant):

1-الإقترانات المتناظرة احادية الحد (monomial symmetric functions):

إذا كانت $p=(p_1,p_2,.....,p_r)$

تعطى أحادية الحد M_p، من الدرجة |p| بالعلاقة :

$$M_p=\sum x_1^{p_1}x_2^{p_2}....x_r^{p_r} \qquad (1-47)$$

والجمع على كل التباديل المختلفة . ومثال عليها r=3 (x_1,x_2,x_3) فإن:

$$M_{11}=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$$

2- **اقترانات الجمع المتناظرة والمتجانسة** (Homogeneous sum symmetric functions):

يعرف اقتران الجمع المتجانس h_r على أنه الجمع على كل أحاديات الحد M_p حيث أن p هي تجزئة r

$$h_r=\sum M_p \qquad (1-48)$$

ومثال على ذلك:

$$h_3=M_3+M_{21}+M_{111}$$

3- **الإقترانات المتناظرة الابتدائية** (Elementary Symmetric Functions):

ويعرف الاقتران e_r ببساطة كأحادي الحد عندما تكون التجزئة(1^r) بحيث:

$$e_r=\sum x_1x_2.....x_n \qquad (1-49)$$

4- **الاقترانات الأسية المتناظرة** (power symmetric functions) :

ويعرف الاقتران الأسي p_r على أنه الجمع للمتغيرات x_i بعد رفعها للقوة r

$$p_r = x_i^r \qquad (1-50)$$

-5 **إقترانات S** (S– Functions):

هي الإقترانات المتناظرة التي يعبر عنها بدلالة اقترانات الجمع المتناظرة أو بدلالة الاقترانات الابتدائية المتناظرة وتأخذ شكل المحددة (determinant) ويعرف اقتران S باستخدام المحددة كالتالي:

إذا كانت λ تجزئة لـ r فإن الاقتران S هو المحددة لاقترانات الجمع المتناظرة h_r بحيث :

$$\{S\} = |h_{\lambda_i - i + j}| \qquad (1-51)$$

i رقم الصف و j رقم العامود مع ما يتضمنه تعريف h_r من خواص مثل $h_0 = 1,$ و $h_r = 0$ عندما تكون $r < 0$.

6 – كثيرات حدود شور (Schur polynomials) :

هي كثيرات حدود تحتوي n من المتغيرات وترتبط بتجزئة مرتبة تنازليا، وتعد تعميماً لكثيرات الحدود المتناظرة (كثيرات الحدود الابتدائية،وكثيرات الجمع المتناظرة والكاملة)، وفي نظرية التمثيل (representation theory) تعتبر واصفات للتمثيل غير المخفض في الزمر الخطية العامة ، وتشكل أساس لكل كثيرات الحدود المتناظرة مثل كثيرات حدود زونال ،كثيرات حدود جاك ، وكثيرات حدود ماكدونالد وغيرها.

وتعرف من خلال دالة مولدة(generating function)كالتالي:

$$\sum_{k \in z} S_\lambda(x) z^k = \exp^{\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i} \qquad (1-52) \ \ \text{m}$$

بحيث أن $S_0(x)=1;\ S_k(x)=0$ for $k<0$

ولأي تجزئة من تمثيل يونغ $\lambda=\{\lambda_1\geq\lambda_2\geq......\geq 0\}$ فإن كثيرة حدود شور المتعلقة بهذه التجزئة هي:

$$S_{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k}(x)=\det S_{\lambda_i-i+j}(x) \qquad (1\text{–}53)$$

الفصل الثاني

كثيرات حدود زونال والدوال المتناظرة

Zonal polynomials and symmetric functions

كثيرات حدود زونال(zonal polynomials)

بدأ مفهوم كثيرات حدود زونال من خلال أعمال جيمس عام (1954) والتي لها خصائص ثابتة بالنسبة لقياس (Haar) وتعبر عن الكثافة .لتوزيع ويشارت(Wishart) الإحصائي من خلال سلاسل لا نهائية تتضمن كثيرات حدود زونال .كما يمكن لهذه السلاسل اللانهائية أن تعطي تعبيراً واضحاً للدوال فوق الهندسية (hypergeometric functions) .

ثم دخلت كثيرات حدود زونال إلى نظرية التمثيل (representation theory) وظهرت لها خصائص جديدة ، بحيث أنه يمكن التعبير عنها باستخدام الدوال المتناظرة الاحادية (monomials) والدوال المتناظرة الأسية(power sum functions).

2-1 كثيرات حدود زونال في النظرية الإحصائية:

zonal polynomials in statistical theory

دور كثيرات حدود زونال في النظرية الإحصائية غير مباشر. بحيث أن دالة الكثافة (density function)والتي هي مركزية- والمتغيرات العشوائية تنشأ في

نظرية الاقترانات ذات المتغيرات ال متعددة تميل لتصبح دوال فوق هندسية لمصفوفات بحيث تصبح جاهزة يتم نشرها من خلال كثيرات حدود زونال . والنظرية الإحصائية غالبا تقدم دوال مولدة (Generating function) مثل تحويل لابلاس أو تحويل فورير وعندما يصبح لدالة الكثافة دالة فوق هندسية يتم نشرها باستخدام كثيرات حدود زونال وهذا كان الإستخدام الرئيسي لكثيرات حدود زونال ولكنه ليس الوحيد.

وحتى إذا كانت كثيرات حدود زونال مركزية لنظرية الإحصاء الرياضي لكنها ليست محددة بدقة وإنما بحسابات تقريبية والحسابات الحالية لإيجاد تقريب لجميع عائلة كثيرات حدود زونال بتجزئة وإيجاد خوارزميات فعالة لتجزئات أعلى.

والتحدي الأول هو استخدام كثيرات حدود تم حسابها سابقا لإيجاد كثيرات حدود زونال بمستويات أعلى .

والتحدي الثاني هو إيجاد طريقة لجمع خصائص كثيرات حدود زونال عندما تتغير المحددات الداخلية.

هناك مشكلة عند استخدام وتطبيق كثيرات حدود زونال التعبير عن الحدود المتعاقبة للنشر فوق الهندسي لكثيرات الحدود.

وكونها دالة ذاتية (eigen function) لمؤثر تفاضلي من الدرجة الثانية فإنها أصبحت حالة ذاتية(eigen state) لمؤثر لابلاس–بلترامي . [James(20)] .

وعند تعميمه يصبح هاملتون عام لنموذج (Calogero–Satherland) والذي يصف حالة جسيمات عديدة . ترتبط كثيرات حدود زونال بدوال جاك (Jack functions) والتي هي امتداد لكثيرات حدود شور.

تعرف كثيرات حدود زونال لأي مصفوفة من خلال تجزئة لأعداد صحيحة موجبة.

تعريف: إذا كانت y هي مصفوفة (mxm) متناظرة و $y=(y_1,....,y_m)$ و تجزئة $(k=(k_1,k_2....,k_n))$ لـ k بحيث أنها لا تزيد عن m من الأجزاء فإن كثيرة حدود زونال لـ y: (y) C_κ هي كثيرة حدود متناظرة ومتجانسة من الدرجة k للجذور $y_1....,y_m$بحيث أن

أ)الحد الأعلى في $c_\kappa(y)$هو $y_1^{\kappa_1}....,y_m^{\kappa_m}$ وبذلك فأن :

$$c_\kappa(y)=d_\kappa y_1^{\kappa_1}....,y_m^{\kappa_m}+lower.terms \qquad (2-1)$$

ب)كثيرات الحدود $c_\kappa(y)$ هي دالة ذاتية للمؤثر Δ_y

$$\Delta_y=\sum_{i=1}^{m}y_i^2\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{m}\frac{y_i^2}{y_i-y_j}\frac{\partial}{\partial y_i} \qquad (2-2)$$

وهذا المؤثر هو مؤثر لابلاس-بلترامي

جـ) كثيرات حدود زونال معاملات وحدة عند نشر $(try)^\kappa$

$$(try)^\kappa=(y_1+.....+y_m)^\kappa=\sum_{k}^{m}c_\kappa(y) \qquad (2-3)$$

وسوف نستخدم لاحقاً الرمز Z_λ لكثيرات حدود زونال المعايرة

نظرية(2-1) [Muirhead (29)]:

كثيرة حدود زونال $c_k(3)$ ذات التجزئة $k=(k_1,....,k_m)$ تحقق المعادلة التفاضلية .

$$\Delta_y c_\kappa(y)=[\sum\kappa_i(\kappa_i-1)+\kappa(m-1)]c_\kappa(y)$$

(2.4)

حيث أن Δ_y هو المؤثر في العلاقة $(2-2)$

البرهأن: من الشرط (1) والشرط (2) للحد الأول

$$\Delta_y y_1^{\kappa_1}\ldots\ldots y_m^{\kappa_m} =$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i}(y_1^{\kappa_1}\ldots. y_m^{\kappa_m}) = \sum \kappa_i(\kappa_i - 1)(y_1^{\kappa_1}\ldots\ldots y_m^{\kappa_m})$$

$(2-5)$

للحد الأول

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{y_i^2\kappa_i}{y_i - y_j}(y_1^{\kappa_1}\ldots\ldots y_m^{\kappa_m}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\frac{y_i\kappa_i}{y_i - y_j}$$

وللحد الثني

لكن

$$\kappa_i = \frac{y_i\kappa_i}{y_i - y_j} - \frac{y_j\kappa_i}{y_i - y_j} \qquad (2-6)$$

وبالتعويض في المعادلة بدلالة k_i ينتج :

$$\Delta_y c_\kappa(y) = [\sum_{i=1}^{m}\kappa_i^2 - \kappa + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\kappa_i + \frac{y_j\kappa_\iota}{y_i - y_j}](y_1^{\kappa_1}\ldots. y_m^{\kappa_m}) + Lower.terms$$

$$= [\sum_{i=1}^{m}\kappa_i^2 - \kappa + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}(\kappa_i + \frac{y_j}{y_i - y_j})](\kappa_j - \kappa_i)(y_1^{\kappa_1}\ldots\ldots y_m^{\kappa_m})$$

$$= [\sum_{i=1}^{m-1}\kappa_i^2 - \kappa + \sum_{\iota=1}^{m-1}(\kappa_i m - i\,\kappa_i)](y_1^{\kappa_1}\ldots\ldots y_m^{\kappa_m})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} [\kappa_i (\kappa_i - \iota) + k(m-1)](y_1^{\kappa_1} .... y_m^{\kappa_m}) + lower..terms$$

إنّ الشرطين الأول والثني والنظرية (1−2) تشكل علاقات مرجعية لحساب كثيرات حدود زونال .

ونشير إلى أنه حتى الآن لا توجد صيغة عامة لكثيرات حدود زونال وإنما يتم التعبير عنها باستخدام دالّات أخرى متناظرة .

عند m=1 فإن كثيرات حدود زونال تتعلق بمتغير واحد $C_\kappa(y) = y^k$ وعن ثابت مثل b فأن

$$c_\kappa(by) = b^\kappa c_\kappa(y) \qquad (2-7)$$

ويمكن تمثيل كثيرات حدود زونال باستخدام الدالات الأحادية المتناظرة

$$M_\kappa(y) = \sum \sum y_{i_1}^{\kappa_1} y_{i_2}^{\kappa_2} ..... y_{i_P}^{\kappa_P} \qquad (2-8)$$

حيث أن p عدد الأجزاء غير الصفرية في التجزئة وبدلالة الحد الأول تصبح:

$$M_\kappa(y) = y_1^{\kappa_1} ..... y_m^{\kappa_m} + symmetric.terms$$

مثال:

$$m_1(y) = y_1 + ...y_m$$

$$m_2(y) = y_1^2 + ...y_m^2$$

$$m_{(1,1)} = \sum_{i<j}^{m} y_i y_j$$

ولحساب $c_\kappa(y)$ باستخدام الأحاديات المتناظرة عند $k=1$ حيث أنه توجد تجزئة واحدة

$$c_1(y)=(try)=y_1+.....y_m=m_1(y)$$

وعند k=2 يوجد توجد اثنتان من كثيرات حدود زونال تتعلق بالتجزئة (2) ،(1,1) . وبما أن $c_\kappa(y)$ هي متناظرة ومتجانسة من الدرجة الثانية فأن:

$$\begin{aligned}c_2(y)&=d_2y_1^2\\&=d_2(y_1^2)+....+\beta y_1y_2+symmetric.terms\\&=d_2(y_1^2+.........+y_m^2)+\beta(y_1y_2+....+y_{m-1}y_m)\\&=d_2M_2(y)+\beta M_{(1,1)}(y)\end{aligned}$$

من الشرط(1)

وللتجزئة (1,1)

$$\begin{aligned}c_{(1,1)}(y)&=d_{(1,1)}(y_1y_2)+lower..terms\\&=d_{(1,1)}(y_1y_2+.....+y_{m-1}y_m)\end{aligned}$$

من الشرط (3)

$$\begin{aligned}(try)^2&=c_2(y)+c_{1,1}(y)=M_2(y)+2M_{1,1}(y)\\&=d_2M_2(y)+(\beta+d_{1,1})M_{1,1}(y)\end{aligned}$$

ومنها فأن:

$$d_2=1,d_{1,1}=2-\beta$$

ولذلك

$$c_2(y) = M_2(y) + \beta M_{1,1}(y)$$
$$c_{1,1}(y) = (2-\beta)M_{1,1}(y)$$

والثابت β يمكن إيجاده من الشرط (2) في المعادلة التفاضلية:

$$\Delta_y c_2(y) = [2(2-1) + 2(m-1)] = 2mc_2(y)$$
$$= 2mM_2(y) + 2m\beta M_{1,1}(y)$$
$$\Delta_y M_2(y) = 2mM_2(y) + 2M_{1,1}(y)$$
$$\Delta_y M_{1,1}(y) = (2m-3)M_{1,1}(y)$$

وبالتعويض في المعادلات أعلاه ينتج :

$$2mM_2(y) + 2M_{1,1} + \beta(2m-3)M_{1,1} = 2mM_2(y) + 2m\beta M_{1,1}$$

نجد أنّ $\beta = \frac{2}{3}$

ومنها :

$$c_2(y) = M_2(y) + \frac{2}{3}M_{1,1}(y)$$
$$c_{1,1} = \frac{4}{3}M_{1,1}(y)$$

وبشكل عام فإن المعادله التفاضلية في الشرط الثأني تظهر علاقة مرجعية بين معاملات الأحاديات المتناظرة في كثيرة حدود زونال

$$c_\kappa(y) = \sum_{\lambda \le \kappa} c_{\kappa,\lambda} M_\lambda(y) \qquad (2-9)$$

حيث أنّ $c_{\kappa,\lambda}$هي ثوابت والجمع ليكون على جميع التجزئات.

والعلاقة والمرجعية لهذه الثوابت تأخذ الشكل :

$$c_{\kappa,\lambda} = \sum_{\lambda \le \mu \le \kappa} \frac{(l_i + t) - (l_i - t)}{p_\kappa - p_\lambda} c_{\kappa,\mu} \qquad (2-10)$$

انظر [James,(20)]

حيث أن:

$$\lambda = (l_1 .... l_m), \mu = (l_1 ....., l_i + t, ..., l_i - t, ... l_m)$$
$$t = 1, ..., l_i$$

مع ملاحظة أن $\mu > \lambda$

وأنّ الثابت للحد الأعلى يتم إيجاده مباشرة من المعادلة التفاضلية وهو يساوي 1 ،و لأي كثيرة حدود $C_k(y)$ فأن $c_{k,k} = 1$،وهذا يساعد في حساب بقية المعاملات .

والعلاقة المرجعية الأخيرة تستخدم لإيجاد المعاملات لكثيرات حدود ذات رتبة أعلى.

مثال:عند $k = 4$

$$c_4(y) = M_4(y) + c_{4,(3,1)} N_{3,1} + c_{4,(2,2)} M_{2,2}$$
$$+ c_{4,(2,1,1)} N_{2,1,1} + c_{4,(1,1,1,1)} M_{1,1,1,1}$$

$$c_{4,4} = 1, for \lambda = 3,1$$
$$p_4 = 4(4-1) = 12$$
$$p_{3,1} = 3(3-1) + 1(1-2) = 5$$
$$c_{4,(3,1)} = \frac{(4+1)-(0-1)}{12-5} c_{4,4} = \frac{4}{7}$$

$c_{4,(2,2)}$

يأتي من التجزئات

$(3,1), 4$

$$p_{2,2} = 2(-1) + 0 = 2$$
$$c_{4(2,2)} = \frac{4-0}{12-2} c_{4,4} + \frac{(2+1)+(2-1)}{12-2} c_{4(3,1)}$$
$$= \frac{2}{5} + \frac{2}{15} \times \frac{4}{7}$$
$$= \frac{18}{35}$$

$c_{4,(2,1,1)}$ يأتي من التجزئات $(3,0,1)$ و $(3,1)$ و $(2,2)$

$$p_{2,1,1} = 2(2-1)+1(1-2)+1(1-3)$$

$$c_{4,(2,1,1)} = 2\times\frac{3-0}{12--1}c_{4,(3,1)} + \frac{2-0}{12--1}c_{4,(2,2)}$$
$$=\frac{6}{13}\times\frac{4}{7}+\frac{2}{13}\times\frac{18}{35}$$
$$=\frac{12}{35}$$

$c_{4,(1,1,1,1)}$ يأتي من التجزئات

$$(2,0,1,1),(2,1,0,1),(2,1,1,0),(1,2,0,1),(1,1,2,0),(1,2,1,0)$$

وبما أن $p_{(1,1,1,1)} = -6$ فأن :

$$c_{4,(1,1,1,1)} = 6.\frac{2-0}{12+6}c_{4,(2,1,1)} = \frac{8}{35}$$

لذلك فكثيرة حدود زونال من الدرجة الرابعة هي

$$C_4(y) = M_4(y)+\frac{4}{7}M_{(3,1)}+\frac{18}{35}M_{(2,2)}(y)$$
$$+\frac{12}{35}M_{(2,1,1)}(y)+\frac{8}{35}M_{(1,1,1,1)}(y)$$

كثيرة حدود زونال التالية يمكن أن تكتب بالشكل:

$$C_4(y) = M_4(y)+\frac{4}{7}M_{(3,1)}+\frac{18}{35}M_{(2,2)}(y)$$
$$+\frac{12}{35}M_{(2,1,1)}(y)+\frac{8}{35}M_{(1,1,1,1)}(y)$$

ومن خواص كثيرات حدود زونال المجزأة نذكر هنا :

١ إذا كانت المعاملات $c_{k,\lambda}$ في العلاقة($2-7$) وبفرض أن k مجزأة لـ p من الأجزاء غير الصفرية.وإذا كانت التجزئ λ لـ k لها أقل من p من الأجزاء غير الصفرية و $\lambda < k$ فأن $c_{k,\lambda} = 0$.

٢ إذا كانت y هي مصفوفة $m\times m$ من الرتبة r بحيث أن
$y_{r+1}=....=y_m=0$ وإذا كانت k هي تجزئة لـ k أكثر من r من
الأجزاء فإن $C_k(y)=0$.

جدول 1: معاملات الدالّات الأحادية المتناظرة $M_\lambda(y)$ في كثيرات حدود زونال $C_\lambda(y)$ ولغاية الرتبة الخامسة

$k=2$	λ		
		M_2	$M_{1,1}$
	z_2	1	2/3
	$z_{1,1}$	0	4/3

	M(3)	M(2,1)	M(1,1,1)
z_3	1	3\5	2\5
$z_{2,1}$	0	12\5	18\5
$z_{1,1,1}$	0	0	2

K=4

z_{λ}	(4)	(3,1)	(2,2)	(2,1,1)	(1,1,1,1)
z_{4}	1	4\7	18\35	12\35	8\35
$z_{3,1}$		24\7	16\7	88\21	32\7
$z_{2,2}$	0	0	16\5	32\15	16\5
$z_{2,1,1}$	0	0	0	16\3	64\5
$z_{1,1,1,1}$	0	0	0	0	16\5

	5	4,1	3,2	3,1,1	2,2,1	،2,1,1.1	1,1,1،.1,1
z_{5}	1	5\9	10\21	10\63	2\7	4\21	8\63
$z_{4,1}$	0	40\9	8\3	46\9	4	14\3	40\9
$z_{3,2}$	0	40\9	48\7	32\7	176\21	64\7	80\7
$z_{3.1.1}$	0	0	0	10	20\3	130\7	200\7
$z_{2,2,1}$	0	0	0	0	32\3	16	32
$z_{2,1,1,1}$	0	0	0	0	0	80\7	800\21
$z_{1,1,1,1,1}$	0	0	0	0	0	0	16\3

معاملات الدالّات الأسية p في كثيرات حدود زونال ذات الدرجة الثالثة

	p_3	p_2p_1	p_1^3
z_3	8	6	1
$z_{2,1}$	2	1	1
$z_{1,1,1}$	2	3	1

ربط جيمس التوزيعات للجذور ا لكامنة لمصفوفة بتوزيع(Wishart) من خلال كثيرات حدود زونال . التوزيعات يعبر عنها بالدوال فوق الهندسية (hypergeometric functions) والتي يمكن كتابتها باستخدام سلسلة من كثيرات حدود زونال . يوجد برنامج حاسوبي لحساب كثيرات حدود زونال من الدرجة الثانية .[James(19)]

2-2 دوال جاك ودوال زونال

الدوال المتناظرة $J_\lambda(x)$ تسمى دوال جاك،والتي يمكن التعبير عنها بدلالة الأحاديات المتناظرة :

$$J_\lambda(x) = \sum_\mu \upsilon_{\lambda\mu}(\alpha) m_\mu \qquad (2-11)$$

نظرية(2-2): [Stanley(35)]

هناك دوال متناظرة ووحيدة $J_\lambda = J_\lambda(x,\beta)$ ، تحقق الشروط الثلاثة التالية:

١ –التعامد $<J_\lambda, J_\mu> = 0$ إذا كانت $\lambda \neq \mu$.

٢ -المثلثية(traingularity) ،إذا كتبت بالشكل $J_{\lambda}(x)=\sum_{\mu}\upsilon_{\lambda\mu}(\alpha)m_{\mu}$ فأن المعاملات $\upsilon_{\lambda\mu}=0$ إلا إذا كانت $\mu\leq\lambda$.

٣ -التطبيع (normalization) ،إذا كانت $|\lambda|=n$ فأن المعامل $\upsilon_{\lambda 1^n}$ لـ $x_1,x_2,...,x_n$ يساوي $n!$.

توجد حالتان خاصتان لدوال جاك من التعريف

1- $J_{\lambda}(x,1)=H_{\lambda}S_{\lambda}(x)$ حيث أن H_{λ} هو طول الهوك(Hook Length) ،و $S_{\lambda}(x)$ هي دالة شور المتناظرة

2 - $J_{\lambda}(x,2)=Z_{\lambda}(x)$ ، $Z_{\lambda}(x)$ هي دوال زونال.

دوال جاك تم تعريفها من قبل هنري جاك(H.Jack).ماكدونالد أضاف صفات عديدة وتم تعميمها إلى كثيرات حدود جديدة هي كثيرات حدود ماكدونالد .

بعض الصفات الأساسية لكثيرات حدود زونال العقدية عند $\beta=1$ التي سوف نستخدمها لاحقاً:

$$Z_{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k}(\mathrm{x})=\det Z_{\lambda_i-i+j}(x) \qquad (2\text{-}12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}Z_k(x)=Z_{k-i}(x) \qquad (2\text{-}13)$$

$$\begin{aligned}Z_{k_1,...,k,k-1,...,k_n}&=0\\ Z_{k_1,...,k,k-1,...,k_n}&=0\end{aligned} \qquad (2\text{-}14)$$

$$Z_{k_1,...,k,k-2,...,k_n}(x)=-Z_{k_1,...,k-1,k-1,...,k_n}(x)=0 \qquad (2\text{-}15)$$

$$\sum_{m=j+1}^{k}(m-k)x_{m-j}Z_{k-m}(x)=(k-j)Z_{k-j}(x) \qquad (2\text{-}16)$$

نظرية(3−2) :

كثيرات حدود زونال هي دوال ذاتية لهاملتون كالوغيرو-ساذرلأند وبقيمة ذاتية $\varepsilon=\sum_{i=1}^{N}(\lambda_i^2+\lambda_i(N-2i+1)$ ، حيث أن $\lambda=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i$

البرهأن:

يعتبر هاملتون كالوغيرو – ساذرلاند الحالة العامة لمؤثر لابلاس- بلترامي والذي في إحدى صيغه يأخذ الشكل :

$$H=\sum_{i=1}^{n}(x_i\frac{\partial}{\partial x_i})^2+\beta\sum_{i\neq j}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-x_j\frac{\partial}{\partial x_j}) \qquad (2\text{-}17)$$

كثيرات حدود زونال هي دوال متناظرة ومتجانسة ، و لأي دالة متناظرة ومتجانسة $f(x)$ من الدرجة m فـإن تطبيق مؤثر ايلر ($\sum_{i=1}^{N}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$)عليها يعطي:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)=mf(x)\\&\sum_{i=1}^{N}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}Z_\lambda(x)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i Z_\lambda(x)\end{aligned} \qquad (2\text{-}18)$$

ومنها

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i\frac{\partial}{\partial x_i})(x_i\frac{\partial}{\partial x_i})Z_\lambda(x)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2Z_\lambda(x) \qquad (2\text{-}19)$$

وللجزء الثلني من الهاملتون:

$$\sum_{i<j}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-x_j\frac{\partial}{\partial x_j})Z_\lambda(x)=\sum_{i\neq j}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}(\lambda_i-\lambda_j)Z_\lambda(x) \qquad (2\text{-}20)$$

لكن
$$\frac{x_i}{x_i - x_j} + \frac{x_j}{x_j - x_i} = 1$$

وهذا يعطي
$$\sum_{i<j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) Z_\lambda(x) = \sum_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) Z_\lambda(x)$$
(2-21)

من الحقيقة :

$$\sum_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) = (n-1)\lambda_1 + (n-3)\lambda_2 + \dots\dots\dots + (n-2i+1)\lambda_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (n-2i+1)\lambda_i \qquad (2\text{-}22)$$

ثم بالتعويض في المعادلة (2-17) يكتمل البره ان.

الفصل الثالث

العلاقة بين نظرية الحقل التوافقي ونموذج كالوغيرو – ساذرلاند

Correspondence between CFT and Calogero– Sutherland Model

إنّ نموذج كالوغيرو- ساذرلاند وتعميماته يقدم مساعدة كبيرة لفهم الفيزياء الكمومية للجسيمات العديدة .والدوال الموجية لهذه الأنظمة المتكاملة تعطى بدلالة دوال متناظرة ،والدوال الذاتية (Eigen functions) لهاملتون الطاقة تتضمن كثيرات حدود جاك .والتي تقدم وصفاً جبرياً لهذه النماذج وما يتعلق بها من دوال متناظرة .

والأشعة المنفردة في النماذج التوافقية في نظرية الحقل التوافقي عبارة عن حالة (state) تقدم وصفا للمادة أو الوتر من حيث الطاقة أو السبين كما أنها تتعلق بدوال الارتباط (correlation functions) رياضياً في نظرية التمثيل(representation theory) وفيزيائياً في الميكانيكا الإحصائية وميكانيكا الكموم ويتم من خلالها دراسة نوع التفاعل بين الحقول المتواجدة في نموذج فيرما ذي الأبعاد اللأنهائية والتي تمثل من خلال نماذج توافقية تلعب دوراً مهماً في نظرية الحقل التوافقي ،وهذا موضح بشكل موسع في [بيلافين،بولياكوف و زامولوتشيكوف(3)]،وفي هذا العمل سيتم التعبير عن الهاملتون في نموذج كالوغيرو – ساذرلاند بدلالة مولدات فيراسورو من نظرية الحقل التوافقي

3-1-1 جبر فيراسورو:

يعتبر جبر فيراسورو امتداد مركزي لجبر لي(Lie algebra)الرياضي وله أهمية كبيرة في الفيزياء لسببين.الأول أنه يعطي موتّر الطاقة –الاندفاع بشكل مكمم (quantized) في نظرية الحقل في بعدين والث اني أنه يطبق في حقل ميك انيكا

الإحصاء في بعدين وقد دخل الفيزياء عام 1970 لاتصاله بنظرية الوتر ولكنه يتعلق بالنظريات التوافقية في بعدين.

وباستخدام مؤثرات فيراسورو يعرف موتّر الاندفاع–الطاقة كالتالي:

$$T(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n z^{-n-2} \qquad (3-1)$$

يمكن النظر الى مولد جبر فيراسورو على أنها أنماط (modes) توافق نشراً لموتّر الطاقةالاندفاع، أن z عدد ينتمي إلى مجموعة الأعداد العقدية (C)،والمولد (L_n)من جبر فيراسورو يعطى بالعلاقة:

$$L_n=\frac{1}{2\pi i}\oint T(z) z^{-n+1} \qquad (3-2)$$

والمولد أعلاه مؤثر هيرميتي ويحقق العلاقة(26-1):

$$L_n^{\dagger}=L_{-n} \qquad (3-3)$$

3-1-2 الشحنة المركزية

نتيجة اخذ معدل دالة الارتباط (correlation function)حول نقطتين z,m لموتّر الطاقة ظهر الحد c والذي لا يظهر عند اخذ معدل دالّة الارتباط لل حقل الرئيسي φ وهذا يدل على أن موتّر الطاقة–الاندفاع ليس حقلاً رئيسياً . وعندما يكون مقدار الشحنة المركزية (c) يساوي (1) فإنها تمثل نظرية الحقل الحر حيث تتواجد الحقول بشكل حر ولا يوجد تفاعلات بينها . بينما عند القيمة($\frac{1}{2}$)تمثل نموذج ايسنغ(Ising model) في الميكانيكا الإحصائية ونموذج (pot)عند ($c=\frac{3}{5}$)،وعند اقتران الجاذبية مع المادة تمثل النموذج الحرج (critical model) ويكون عندها مقدارها الكلي (26) .وتتكون من نوعين: c^M الأولى للمادة والثانية للجاذبية c^L وللمقدار الكلي ل(c) يعطى بالعلاقة:

$$c = c^M + c^L = 26 \qquad (3\text{-}4)$$

وللقطاع المادي تعطى الشحنة المركزية بالعلاقة:

$$c = 1 - 12(Q^M)^2 \qquad (3\text{-}5)$$

بينما لقطاع الجاذبية بالعلاقة:

$$c = 1 - 12(Q^L)^2 \qquad (3\text{-}6)$$

والعلاقة بين Q^M و Q^L من خلال العلاقة التركيبية:

$$\begin{aligned} Q_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^M \pm iQ^L) \\ (Q^M)^2 + (Q^L)^2 &= -2 \end{aligned} \qquad \textbf{(3.7)}$$

ومن الشرط(3.4) ينتج:

$$Q_+ Q_- = -1 \qquad \textbf{(3.8)}$$

وبتعريف الوزن التوافقي (conformal weight) للفراغ h :

$$h=\frac{1}{2}p(p-2Q) \qquad (3\text{-}9)$$

حيث أن p هي الاندفاع، وإعادة تعريفه بعد انتقال مقداره Q ، والتي تسمى الشحنة المرجعية (background charge) $P=p-Q$.تصبح العلاقة أعلاه

$$h=\frac{1}{2}(P-Q)(P+Q) \qquad (3\text{-}10)$$

والذي يمثل الطاقة أو السبين حسب المؤثر .وعلاقة بين الاندفاع في حقل ليوفيل (الجاذبية) والاندفاع في قطاع المادة ،يعطى بالعلاقات:

$$\begin{aligned}
P^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(P^{M} \pm P^{L}) \\
P^{M}(r,s) &= \frac{1}{2}[(r+s)Q^{M} + (r-s)iQ^{L}] \\
iP^{L}(r,s) &= \frac{1}{2}[(r-s)Q^{M} - (r-s)iQ^{L}]
\end{aligned} \qquad (3\text{-}11)$$

حيث أن P^{M},P^{L} ليست حقيقية وإنما عقدية وبإدخال تعريف للعلاقة بين $P^{\pm}$ و $Q_{\pm}$ باستخدام أعداد حقيقية $r,s>0$ كالتالي:

$$\begin{aligned}
r &= -\frac{1}{2}Q_{-}P^{+} \\
s &= -\frac{1}{2}Q_{+}P^{-}
\end{aligned} \qquad (3\text{-}12)$$

(3−2) جبر فيراسورو وكثيرات حدود جاك

إن جبر فيراسورو يولد بـ $L_n,(n \in z)$ وشحنة مركزية c
وعلاقات تبادلية :

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{n(n^2-1)c}{12}\delta_{n+m,0} \qquad (3.13)$$

والتي قدمت من قبل فيراسورو ولعبت دورا مهما في نظرية ال حقل التوافقي التي قدمت من قبل [(3) Belavin ,Polyakov] . وإذا حولنا جبر فيراسورو إلى تمثيل بوزوني . نعتبر مولدات فيراسورو $L_n,(n \in z)$ كمؤثرات على فضاء فوك البوزوني . وهذا التكنيك أثبت بأدوات فاعلة للغاية للاستفادة من جبر فيراسورو في مواقع عديدة . ويجعلنا قادرين على بناء مؤثرات تبادلية بدلالة حقول رئيسية .وهذا يجعلنا كذلك في بعض الحالات نراقب الأشعة المنفردة في فضاء فوك البوزوني ، ومع هذا لا زالت هناك صعوبة لفهم التركيب الدقيق للأشعة المنفردة لجبر فيراسورو في نموذج فيرما.

إن نموذج كالوغيرو – ساذرلاند له المعرفة الخاصة المرجعية حيث أنه في عام 1969 قدم كالوغيرو (Calogero) نظاما ديناميكيا بجهد يتناسب عكسيا مع مربع المسافة $u\alpha\frac{1}{r^2}$ وهذا النظام محلول تماما .

في عام 1972 مدد ساذرلاند (Sutherland) النظام السابق إلى حالة ال كمون الدوري، وحصل على نتائج عديدة وواضحة . واستثمر واداتي (Wadati) النظام الكمومي وبنى هاملتونيان جديداً يعطى بالعلاقة :

$$H_{CS} = \frac{1}{2}\sum_{i=1} p_i^2 + \beta(\beta-1)\sum_{i<j}\frac{\pi^2}{4\sin^2\frac{\pi}{2}(q_i-q_j)} \qquad (3-13)$$

حيث أنّ q_i إحداثيات $(0 \le q_i \le L)$ و $p_i = -\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial q_i}$ هو الاندفاع ونموذج (CS) هو نظام لكمومي له حالة أرضية للهاملتون تأخذ الشكل :

$$\psi_0 = \prod_{i<j} \sin^{\beta} \frac{\pi}{2}(q_i - q_j) \qquad (3-14)$$

وبقية الحالات المثارة تعطى من خلال ضرب كثيرات حدود معينة بـ ψ_0

$$\psi_{\lambda} = J_{\lambda}(x_1, \dots, x_n)\psi_0 \qquad (3-15)$$

حيث إنّ $x_i = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{i}q_i}$ و J_{λ} تسمى كثيرات حدود جاك المتناظرة .والتي بدورها لها خصائص تركيبة متنوعة تجعلها تلعب دوراً اساسياً في دراسة نموذج (CS) وتجعلها تظهر في تمثيل جبر فيراسورو .فعلى سبيل المثال ,وجد [Mimachi,Yamada(28)] أن الأشعة المنفردة لجبر فيراسورو في فضاء فوك البوزوني ليست الا كثيرات حدود جاك .

ومن خلال المؤثرات البوزونية a_n في جبر هايزنبيرغ.

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n,-m} \qquad (3-16)$$

وفضاء فوك الحالة الفراغية :

$$a_0 |A> = A|A> \qquad (3-17)$$

يمكن تمثيل مولدات فيراسورو بهذه المؤثرات البوزونية . من خلال تمثيل (Feigin– Fuch) ،ثم استخدام دالات زونال المتناظرة كأساس لفضاء فوك وذلك لأن هذه الدالات تعطى بدلالة الدالات الأسية المتناظرة p_n .ومن ثم استبدال هذه الدالات الأسية بالمؤثرات البوزونية :

$$p_n\,|A>=\frac{2a_n}{\sqrt{2\beta}}=\sqrt{\frac{2}{\beta}}a_n\,|A> \qquad (3-18)$$

إن اثر L_n على كثيرات حدود زونال البوزونية من اليسار يكون بالإضافة n صندوقاً على جدول يونغ وفي الأماكن المحتملة بينما أثر L_n على كثيرات حدود زونال من اليمين بحذف n صندوقاً من جدول يونغ من الأماكن المحتملة مع المحافظة على ترتيب التجزئة التنازلي.

من خصائص دالات جاك التعامد .

$$<J_\lambda,J_\mu>=\delta_{\lambda,\mu}\beta^{-2|\lambda|}\prod_{s\in\lambda}(a(s)+(l(s)+1)\beta)((a(s)+1)+\beta l(s))$$

(3-19)

حيث أن $a(s)=\lambda_i-j$ (arm length) ويعبر عن عدد المربعات إلى يمين المربع s و $l(s)=\lambda_j-i$ (leg length) ويعبر عن عدد المربعات أسفل المربع في تخطيط يونغ (Yang Tableaux).ودالات زونال تتمتع بالصفة نفسها عند $\beta=2$

إن الدالات الأسية p_n . لها ايضاً خاصية التعامد :

$$\begin{aligned}&<p_\lambda,p_\mu>=\delta_{\lambda,\mu}z_\lambda\beta^{-2|\lambda|}\\&p_\lambda=\prod_{i=1}^{l(\lambda)}p_{\lambda_i}\\&z_\lambda=\prod_i i^{m_i}.m_i\,!\end{aligned} \qquad (3-20)$$

ولذلك فإن دالّات زونال يمكن أن يعبر عنها بدلالة p_n .

[Stanly (35)]

مثال :

$$z_{3}=\frac{2}{\beta^{2}}p_{3}+\frac{3}{\beta}p_{2}p_{1}+p_{1}^{3}$$
$$z_{2,1}=-\frac{1}{\beta}p_{3}+\frac{1-\beta}{\beta}p_{2}p_{1}+p_{1}^{3}$$
$$z_{1,1,1}=2p_{3}-3p_{2}p_{1}+p_{1}^{3}$$

(3–3) جبر فيراسورو في نظرية الحقل التوافقي:

(CFT in Virasoro algebra)

عند نشر المؤثرات لموتّر الطاقة مع نفسه كما في العلاق ة (1–27) يمكن حساب العلاقة التبادلية بين المؤثرات L_n والتي تنتج جبر فيراسورو .

$$[L_n,L_m]=(n,m)L_{m+n}+\frac{c}{12}n(n^{2}-1)\delta_{n,m} \qquad (3\text{–}22)$$

وعند إهمال الحد الأخير نحصل على جبر وت الكلاسيكي(Witt algebra) والذي هو جبر لي (Lie algebra) ولذلك يمكن اعتبار جبر فيراسورو على أنه جبر لي بوجود امتداد مركزي والحد c يأخذ قيما مختلفة وجبريا يتم اعتباره مؤثر يتبادل مع جميع عناصر جبر فيراسورو .

وعادة يتم الحصول على حالات نظرية الحقل التوافقي باستخدام ما يسمى بتمثيل الوزن الأعلى(Highest weight) والتي هي في الحقيقة الحالات الأرضية بالنسبة للهاملتون .وهذه الحالات يمكن إيجادها باستخدام L_0

$$L_0\,|\,h>=h\,|\,h> \qquad (3\text{–}23)$$

وهذه الحالة العليا يتم إيجادها من الحالة الفراغية من خلال التأثير بالحقل الأساسي عند $z=0$

$$|h>=\lim_{z\to 0}\varphi_h(z)|0> \qquad (3-24)$$

مع ملاحظة أنه عندما تؤول z الى الصفر فأنها توافق حالات مقاربة تغيب فيها التآثرات .

ومن هذا نستنتج الحقيقة بأن الحالة ذات الوزن الأعلى يتم إفناؤها باستخدام $L_n, n>0$

والحالات الفراغية $|0>$ تعتبر غير مألوفة بالمقارنة مع نظرية الحقل الكمومي حيث أنها تفنى فقط بمؤثرات فيراسورو L_n. وهذا يعني أن الحالة يتم الحصول عليها ويتم إفناؤها بأكبر عدد من مولدات فيراسورو

وعند التأثير على الفراغ أو الحالة ذات الوزن الأعلى بالمولدات سالبة الرقم L_n تنتج حالة جديدة بوزن توافقي $(h-n)$

$$L_oL_{-n}|h>=(-nL_{-n}+L_{-n}L_o)|h>=(h-n)L_{-n}|h>$$

$$(3-25)$$

وعند التأثير على الحالة الناتجة مرة أخرى تنتج حالة عند المستوى n متحدره من $|h>$

$$L_{-n_1}......L_{-n_\kappa}|h>$$
$$\sum_{i=1}n_i=n \qquad (3.26)$$

والفضاء الذي يتم فيه استخدام هذه الحالات يسمى نموذج فيرما والذي هو احد النماذج في نظرية التمثيل لجبر لي (Lie algebra) ويستخدم لإثبات أن النماذج ذات الوزن الأعلى

غير المخفضة لها أبعاد محددة .وجبر فيراسورو يطبق بتنظيم n_i وبترتيب تنازلي
ولذلك فأن تعريف نموذج فيرما يكون :

$$V_h = span\{\prod_i L_{-n_i} \, |h>\} \qquad (3-27)$$

والفضاء الجديد من الحالات والذي يبنى بتطبيق مولدات فيراسورو التي لها مود سالب على الفضاء ذي الوزن الأعلى يسمى العائلة التوافقية.

عند مستوى معين في نموذج فيرما يحدث تركيب خطي للحالات وتوجد كذلك حالة هي الشعاع المنفرد $|\upsilon>$ الذي يتسم بخاصيتي التعامد لجميع هذه الحالات في النظرية .وبالتأثير بالمولدات ذات المود الموجب على هذه الحالة المنفردة نصل إلى الشعاع المنفرد $|\upsilon>$.مع ملاحظة أنه إذا كان $|\upsilon>$ حالة رئيسية فإن نموذج فيرما يتألف من الأشعة المعدومة(null vectors) وعندها $\upsilon_0 = 0$.

والسؤال هنا ما المقصود بنموذج فيرما في العلاقة(3-27) .بلغة رياضية إنه الفضاء الناتج من فضاءات فرعية تولد من الأشعة المنفردة بينما فضاء هلبرت والذي هو فضاء ينتج من تمديد الفضاء الإقليدي من بعدين أو ثلاثة أبعاد إلى أبعاد نهائية أو لا نهائية ويعالج عمليات الضرب الداخلي ويمكّن من قياس الأطوال و الزوايا وشكل أداة لدراسة المعادلات التفاضلية وميكانيكا الكموم والديناميكا الحرارية و تحليل فورير للإشارات يتركب من الجمع المباشر لنماذج فيرما المبنية على الحالات ذات الوزن الأعلى .

$$H = \oplus_{h,\bar{h}} V_h \otimes V_{\bar{h}} \qquad (3-28)$$

والعائلة التوافقية التي تحتوي على الأشعة المنفردة تسمى منحلة(degenerate) .

وعند تصنيف نظريات الحقل التوافقي نركز على نوعين منها الأولى النظريات الوحدويه (unitary)حيث الضرب الداخلي لحالتين(norm) يكون موجبا . و

مولدات فيراسورو تحقق شرط الهيرمشان $(L_n^+ = L_{-n})$ ووجود المعايرة الموجبة يتضمن شروط قوية على قيم كل من (h,c). و المشكلة أنه عند أي حالة ذات الوزن الأعلى فإن الحالات التي يتم بناؤها من الشعاع المنفرد تزداد بزيادة المستوى n.

المستوى	عدد التجزئات	الحالات
0	0	$\|h>$
1	1	$L_{-1}\|h>$
2	2	$L_{-1}^2\|h>, L_{-2}\|h>$
3	3	$L_{-1}^3\|h>, L_{-2}L_{-1}\|h>, L_{-3}\|h>$
4	5	$L_{-1}^4\|h>, L_{-2}^2\|h>, L_{-3}L_{-1}\|h>, L_{-4}\|h>, L_{-1}^2L_{-2}\|h>$

ومثال على نمو الحالات الناتجة من تطبيق L_{-n} الشعاع المنفرد للمستويات الأولى

وللمستويات التالية فإن عدد التجزئات هو 7، 11، 15، 22 وعند المستوى الأول $(n=1)$ ومن العلاقة (3-22) فأن معايرة الشعاع تكون :

$$<h|L_1L_{-1}|h> = <h|L_{-1}L_1 + 2L_0|h> = 2h \qquad (3-29)$$

مع ملاحظة أن h قيمة ذاتية ،بينما $|h>$ تمثل حالة فيزيائية.وهذا يعني أنه عند التمثيلات الوحدية يكون الشرط $h>0$ بينما أنه عند $|h>=|0>$ فأن الشعاع المتحدر الأول هو شعاع منفرد .والشرط $c \geq 0$ يأتي مباشرة من تأثير المود السالب لمولدات فيراسورو

$$< 0 | L_n L_{-n} | 0 > = < 0 | \frac{1}{12} c (n^3 - n) | 0 > \qquad (3-30)$$

وبالاستمرار عند المستوى الثاني n=2 حيث توجد حالتان جديدتان ،وعند التأثير بمولدات فيراسورو L_2, L_1 اعتبار $< h | h > = 1$ نحصل على مصفوفة 2×2

$$k_2 = \begin{bmatrix} < h | L_2 L_{-2} | h > & < h | L_2 L_{-1}^2 | h > \\ < h | L_1^2 L_{-2} | h > & < h | L_1^2 L_{-1}^2 | h > \end{bmatrix}$$

(3-31)

ولذلك يمكننا التعبير من هذه المصفوفة بدلالة c,h

$$k_2 = \begin{bmatrix} 4h + \frac{1}{2} c & 6h \\ 6h & 4h + 8h^2 \end{bmatrix} \qquad (3-32)$$

وحتى تكون نظريات الحقل التوافقي منطقية فعليها أن تمتلك تمثيلات محدودة وعند قيم $0 < c < 1, h > 0$ فإنه توجد نظريات الحقل الوحدوية (UCFT)وتسمى في هذه الحالة النماذج الأصغرية (minimal models) لأنها تحتوي عددا محدودا من الحقول الرئيسية التي لا تتغير بالنسبة للتحويلات التوافقية وحدها ولا تتشعب في أبعادها التوافقية .

وللنماذج الأصغرية فإن القيم الممكنة لـ c تحدد من خلال عدد صحيح في $m \geq 3$ وبالنسبة ل h فإنها تحدد من خلال أعداد صحيحة r,s

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} m \geq 3 \qquad (3-33)$$

$$h_{r,s}(m)=\frac{((m+1)r-ms)^2-1}{4m(m+1)} \qquad (3-34)$$
$$1\le r\le m, 1\le s\le r$$

المقدار rs مستوى الحالة $rs=|\lambda|$ ، r تمثل عدد الصفوف، s عدد الأعمدة في التجزئة.

وهذه السلاسل يمكن تعميمها إلى سلاسل –ليست بالضرورة تكون(unitary) –من النماذج الأصغرية بنموذج(p,q) :

$$c(p,q)=1-\frac{6(p-q)}{pq} \qquad (3-35)$$

$$h(r,s)=\frac{(pr-qs)^2-(p-q)^2}{4pq} \qquad (3-36)$$

حيث أنّ p,q هي أعداد صحيحة تتعلق بكثيرات الحدود المتناظرة المستخدمة في تمثيل الحقل. وعند ربط نموذج (CS) مع نموذج فيرما في الحقل التوافقي نضع $\beta=\frac{p}{q}$ ، عند $\beta=2\rightarrow p=2,q=1$ $\beta=1\rightarrow p=1,q=1$

و نموذج كالوغيرو– ساذرلاند . وعند ادخال الثابت $\beta=\frac{p}{q}$ فإن الشحنة المركزية في العلاقة (3–35) تصبح :

$$c=1-\frac{6(\beta-1)^2}{\beta} \qquad (3-37)$$

والوزن التوافقي من العلاقة (3–36) يصبح: $\beta=2\rightarrow p=2,q=1$

$$h_{r,s}=\frac{(2r-s)^2-1}{8}$$

3-5 هاملتون كالوغيرو- ساذرلاند والحقل المشترك:

إنّ الدوال الذاتية لهاملتون كالوغيرو – ساذرلاند هي دوال جاك وتوابعها .وبما أن هذه الدوال متناظرة بالنسبة لـ x_i فأنه يمكن تمثيلها باستخدام الدوال الأسية $p_n=\sum_i x_i^n$ ، ومن ثم باستخدام مؤثرات الرفع والخفض a_n, a_{-n}

وهذا يمكننا من تحويل فضاء هلبرت لل حقل المشترك إلى فضاء كثيرات حدود متناظرة بصيغة مثل:

$$\langle 0|e^{\beta\sum_i A(x_i)}a_{-1}.......a_{-n}|0\rangle = p_1.......p_n$$
$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a_n x^n \qquad (3\text{-}38)$$

فضاء فوك يمثل بالحالة $e^{\beta\sum_i A(x_i)}$ وبالتالي اشتقاق الهاملتون بدلالة الاحداثيات المشتركة . [Awata (2)]

$$\mathrm{H}\langle 0|e^{\beta\sum_i A(x_i)} = \langle 0|e^{\beta\sum_i A(x_i)}\hat{\mathrm{H}} \qquad (3\text{-}39)$$

ويعطى مؤثر الاندفاع بالصيغة:

$$\sum_i x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\langle 0|e^{\beta\sum_i A(x_i)} =$$
$$\sum_i\langle 0|e^{\beta\sum_i A(x_i)}\beta\sum_{n=1}^{\infty}x^n{}_i a_n$$
$$=\langle 0|e^{\beta\sum_i A(x_i)}\sum_n\beta a_{-n}a_n \qquad (3\text{-}40)$$

$$\hat{p}=\beta\sum_n a_{-n}a_n$$

وبنفس الطريقة يعطى الهاملتون لدالّة زونال المتناظرة عند $\beta=2$ بالعلاقة:

$$\hat{H} = \sum_{n,m=1}^{\infty} (a_{-n-m} a_n a_m + a_{-n} a_{-m} a_{n+m}) + N\beta \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} a_n \qquad (3\text{-}41)$$

حيث أن عدد المتغيرات يساوي N

والتعبير باستخدام مولدات فيراسورو عن الهاملتون فأنه يأخذ الصيغة

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} L_n + (N - 2a_0)\,\hat{p} \qquad (3\text{-}42)$$

وعند التأثير بهذا الهاملتون على الشعاع المنفرد بدلالة كثيرات حدود زونال فإنّ الحد الأول الذي يحتوي على L_n يساوي صفر ويبقى الحد الثاني الذي يعطي القيمة الذاتية للهاملتون حسب التجزئة $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_m)$

$$\begin{aligned} \hat{H} \left| \upsilon_{r,s} \right\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} L_n + (N - 2a_0)\,\hat{p} \left| \upsilon_{r,s} \right\rangle \\ &= rs\,(N - r + s) \left| \upsilon_{r,s} \right\rangle \end{aligned} \qquad (3\text{-}43)$$

الفصل الرابع

الأشعة المنفردة بدلالة كثيرات حدود زونال الحقيقية

Singular Vectors in term of real Zonal Polynomials

في هذا الفصل سنستخدم نظريتان من نظريات الحقل الكمومي .وه ما جبر فيراسورو ونموذج كالوغيرو–ساذرلاند.

عند إيجاد نظرية تمثيل لجبر فيراسورو فـإن كثيرات حدود جاك وتوابعها تدخل إلى التمثيل . [Mimachi and Yamada (28)] وجدا أن الأشعة المنفردة لجبر فيراسورو ليست إلا كثيرات حدود جاك بطريقة جبريه .

ونحن سنعمل لتوضيح الاستخدام الكامل لكثيرات حدود زونال في تمثيل فيجن–فوتش لجبر فيراسورو وتقديم فهم أكبر للعلاقة بين كثيرات حدود زونال وجبر فيراسورو.

4–1 تمثيل كثيرات حدود زونال باستخدام مؤثرات هايزنبرغ

تعتبر مؤثرات هايزنبيرغ أساسية في تمثيل فيجن – فوتش وفضاء فوك .والمؤثر البوزوني $a_n,(n \in z)$ يرتبط بالعلاقة:

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n,-m} \qquad (4-1)$$

وفي فضاء فوك توجد حالة فراغية $|A>$ بحيث أن $a_0 |A>= A|A>$

ولذلك يمكن تمثيل مولدات فيراسورو L_n بهذه المؤثرات وهذا يعطينا القدرة على استخدام دوال زونال المتناظرة كأساس (basis) في فضاء فوك ونستطيع كتابة كثيرات زونال باستخدام الدوال الآسية المتناظرة p_n

حيث :

$$p_n = \sum_{i=1} x_i^n \qquad (4-2)$$

وتخضع الدوال الأسية للضرب الداخلي

$$
\begin{aligned}
&< p_\lambda , p_\mu >= \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \beta^{-l(\lambda)} \\
&p_\lambda = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} p_{\lambda_i} \\
&z_\lambda = \prod_l i^{m_i} m!
\end{aligned}
\qquad (4-3)
$$

ليمكننا من استبدال الدوال الأسية p_n بكثيرات حدود زونال بالمؤثر البوزوني $\frac{a_n}{2}$

$$
\begin{aligned}
&p_n \leftrightarrow a_{-n} |A> \\
&p_n \leftrightarrow < A | \frac{a_n}{2} \\
&< p_\lambda , p_\mu >= (< A | \prod_{i=1}^{l(\lambda)} a_{\lambda_i})(\prod_{i=1}^{l(\mu)} a_{\mu_i} |A>) \\
&= 2^{-l(\lambda)} \delta_{\lambda,\mu} g_\lambda
\end{aligned}
$$

(4-4)

4-3 اثر L_1, L_2 على فضاء فوك المكون لكثيرات حدود زونال:

إن كثيرات حدود زونال تخضع للتجزئة المرتبة في جدول يونغ.ولهذا فإن تأثير L_n من اليمين يضيف مربعات على التجزئة في الأماكن المحتملة . وتأثير L_n من اليسار يكون بإزالة مربعات من الأماكن المحتملة مع المحافظة على الترتيب التنازلي للتجزئة ومثال ذلك $L_1 |A>$ يزيل مربع واحد من التجزئة المرتبة تنازليا من أي مكان

محتمل . $L_1 | A>$ يضيف مربع واحد الأماكن المحتملة وعكس ذلك $L_{-1} | A>$ يضيف مربعا واحدا في أي مك ان محتمل $L_{-1} | A>$ يزيل مربعا واحدا من الأماكن المحتملة.

ولفضاء فوك الفراغي لدينا $A_{r,s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\sqrt{\beta} - \frac{s}{\sqrt{\beta}})$

ولهذا فإن اثر L_n يعتمد على هذا المحدد و العلاقة التبادلية $[L_n, L_m]$ تولد جميع المؤثرات من L_1, L_2 ولذلك فإننا نحتاج فقط معرفة اثر L_1, L_2 .

وعند التأثير بـ L_1 أو L_2 على الحالة $Z_{r,s}(a_{-n}) | A_{r,s} >$ فإن المعامل يظهر على شكل ضرب طول الهوك العلوي مقسوماً على طول الهوك السفلي . ويظهر كذلك المعامل $A_{r-i,s-j}$.

ومثال ذلك $A_{r-1,s-3}$ فإن المربع الذي تمت إزالته هو المربع في الصف الثالث و العمود الأول .

وعند التأثير بـ L_1 على كثيرة حدود زونال ذات التجزئة المستطيلة $Z_{3,3} | A_{r,s} >$ يمكننا أن نهمل المعامل الذي يعتمد على β ونحصل على :

$$L_1 Z_{3,3} | A_{r,s} >= d_{3,2}(A_{r-2,s-3}) Z_{3,2} | A_{r,s} >$$

وبالتأثير بالمولد L_2 على $Z_{3,3} | A_{r,s} >$

$$L_2 Z_{3,3} | A_{r,s} >= d_{3,1} A_{r-2,s-3}, Z_{3,1} | A_{r,s} > \\ + d_{2,2} A_{r-2,s-3}, Z_{2,2} | A_{r,s} >$$

بينما معايرة Z_λ من[ستانلي(35)]

$$<Z_\lambda, Z_\mu> = \delta_{\lambda,\mu} 2^{-2|\lambda|} \prod_{s\in\lambda} (a(s)+2(l(s)+1))(a(s)+1+2l(s))$$

(4−5)

ومعامل p_1 في تمثيل Z_λ يكون واحد

مثال:

$$z_3 = 8p_3 + 6p_2p_1 + p_1^3$$
$$z_{2,1} = 2p_3 + p_2p_1 + p_1^3$$
$$z_{1,3} = 2p_3 - 3p_2p_1 + p_1^3$$

ومن هذا التوصيف يمكننا أن نحدد دوال زونال وعناصر فضاء فوك وكذلك نأخذ فضاء فوك كمجموعة من كل دوال زونال البوزونية

$$F_A = span\{Z_\lambda \,|\, A > partition\,\lambda\} \qquad (4-6)$$

4−4 الشعاع المنفرد بدلالة كثيرات حدود زونال:

إذا كان تأثير L_n من اليمين يزيل المربعات من التجزئة فإن تأثير L_n من اليسار يضيف مربعات في الأماكن المحتملة للتجزئة ذاتها.ولتبسيط الكتابة نكتب $Z_\lambda | A_{r,s} >$ بالشكل $| Z_\lambda >$:

$$< Z_{\lambda} \mid L_n = \sum_{|\mu|-|\lambda|=n} < Z_{\mu} \mid c_{\lambda\mu}$$
$$L_n \mid z_{\lambda} >= \sum_{|\mu|-|\lambda|=n} d_{\mu\lambda} \mid Z_{\mu\lambda} > \qquad (4-7)$$

ومنها

$$(< z_{\lambda} \mid L_n) \mid z_{\mu} >= c_{\lambda\mu} < z_{\mu}, z_{\mu} >$$
$$< z_{\lambda}(L_n \mid z_{\mu} >) = d_{\mu\lambda} < z_{\lambda}, z_{\lambda} > \qquad (4-8)$$

ومن العلاقتين أعلاه نحصل على:

$$d_{\mu\lambda} = c_{\lambda\mu} \frac{< Z_{\mu}, Z_{\mu} >}{< Z_{\lambda}, Z_{\lambda} >} \qquad (4.9)$$

وعندما نؤثر على كثيرات حدود زونال ذات التجزئة المستطيلة Z_{s^r} بالمؤثر L_1
:

$$c_{(s^{r-1},s-1),s^r} =< A \mid Z_{s^r} L_1 =$$
$$2.\frac{1.2}{(1+2(r-1))(s-1+2)} = \qquad (4-10)$$
$$\frac{4}{(2r-1)(s+1)}$$

حيث أننا نستخدم هنا حاصل ضرب الهوك العلوي للمربع الذي تتم إزالته مقسوماً على طول الهوك السفلي لنفس المربع، وفي هذه الحالة هو المربع الأخير

وكذلك من خاصية التعامد لدوال زونال المتناظرة

$$L_1 Z_{s^r} \mid A_{rs} > \equiv L_1 \mid Z_{s^r} >=$$

$$d_{\mu\lambda}.A_{0,0}.(Z_{s^r} \mid A_{rs} >) = \frac{< Z_{s^r}, Z_{s^r} >}{< Z_{s^{r-1},s-1}, Z_{s^{r-1},s-1} >} c_{\lambda\mu} A_{0,0} =$$

$$\frac{4}{(2r-1)(s+1)} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2r(2r-1)(s+1)s}{2} A_{0,0} \mid Z_{s^r} >$$

$$= rs.A_{0,0} \mid Z_{s^r} >$$

(4−11)

وإذا اعتبرنا أثير L_2 حيث يتم هنا حذف مربعين من التخطيط ذو الشكل المستطيل نحصل على:

$$c_{(s^{r-2},s-2),s^r} = \frac{4.4}{(2+2(r-1))s} \frac{1}{(1+2(m-1)(s+1))} A_{r-i,s-j} \quad (4-12)$$

هنا $i.j$ موقع المربع الذي يتم حذفه.

وبتطبيق L_2 على $Z_{s^r} | A_{rs} >$ وبالإستفادة من خصائص تجزئة يونغ المرتبة تنازليا لدوال زونال :

$$\frac{< Z_{s^r}, Z_{s^r} >}{< Z_{s^{r-2},s-2}, Z_{s^{r-2},s-2} >} =$$

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{(1+2r)(2+2(r-1))(2r)(1+2(r-1))(s+1)(s-1)s.s}{(1+2).2.2.1}$$

(4−13)

كذلك

$$c_{(s^{r-2},(s-1)^2)} = \frac{-2.2}{(1+2(r-2))(s+3)} \cdot \frac{2}{(1+2(r-1))(s+3)} A_{r-i,s-j} \quad (4-14)$$

$$\frac{< Z_{s^r}, Z_{s^r} >}{< Z_{s^{r-2},(s-1)^2}, Z_{s^{r-2},(s-1)^2} >} =$$
$$\frac{1}{16} \frac{2r(1+2(r-2))(2(r-1))(1+2(r-2))(s+3)(s+2)(s+1)s}{4.3.2.1}$$

(4−15)

وبجمع الحالتين نحصل على $L_2 Z_{s^r} | A_{r,s} >$

$$L_2 Z_{s^r} | A_{r,s} >= \frac{1}{2} rs \frac{(s-1)(1+2r)}{3} A_{r-m,s-n} Z_{r-m,s-n} | A_{r,s} >$$
$$-4rs \frac{(s-1)(1+2r)}{3} A_{r-m,s-n} Z_{r-m,s-n} | A_{r,s} >$$

(4−16)

وبما أنّ $A_{r,s}$ هنا هي الحالة ذات الوزن الأعلى ،فإنّ أثر كل من L_1, L_2 يساوي صفر.

لكن كل من $| Z_{s^{r-1},s-1} >, | Z_{s^{r-2},(s-1)^2} >, | Z_{s^{r-1},s-2} >$ لا تساوي صفر، وهذا يعني أنّه حتى تصبح الحالة تمثل شعاعاً منفرداً فإنّ :

$$\boldsymbol{A_{r,s} = A_{0,0} = 0}$$

ومن العلاقة ($4-16$) فـإن هذا يحدث عند $r=m,s=n$ أي أنّ $Z_{s^r}(x)|A_{r,s}>$ هي الشعاع المنفرد وبتجزئة لها تخطيط الشكل المستطيل (rectangular).

وعندما نحدد أنفسنا بقيم β بحيث أنّ $\beta=\frac{p}{q}$ حسب نموذج (p,q) و p,q هي أعداد صحيحة وموجبة .

وإذا استخدمنا قيم محددة لـ β فإن الشحنة المركزية تحقق $c\leq 1$ وهذا يمكننا من إعادة كتابة الحالة ذات الوزن الأعلى $A_{r,s}$ بالشكل :

$$A_{r,s}=\frac{1}{\sqrt{2\beta}}(\frac{pr}{q}-s) \qquad (4-17)$$

وإذا أدخلنا عدد صحيح موجب مثل $a,a\in z_{>0}$ إلى الحالة ذات الوزن الأعلى بحيث يمكن كتابتها بالشكل:

$$A_{r-(r+aq),s-(s+ap)}=A_{-aq,-ap}=0 \qquad (4-18)$$

وبتركيب العلاقتين $(4-11)$و$(4-16)$ مع هذه المتساوية يصبح لدينا سلسلة لانهائية من الأشعة المنفردة أولها $|Z_{s^r}>$:

$$|Z_{s^r}>,|Z_{(s+p)^{m+q}}>,|Z_{(s+2p)^{m+2q}}>,.......,|Z_{(s+ap)^{m+aq}}>,.....$$

(4-19)

وللتحقق من هذه النتيجة ندرس أثر كل من L_1 و L_2 على $|Z_{(n+ap)^{(m+aq)}}>$.

$$L_1 \| Z_{(n+ap)^{(m+aq)}} >= c_{((s+ap)^{(r+aq)-1}, s+ap-1),(s+ap)^{(r+aq)}} \frac{< Z_{(s+ap)^{(r+aq)}} \,|\, Z_{(s+ap)^{(r+aq)}} >}{< Z_{(s+ap)^{(r+aq)-1}, s+ap-1} \,|\, Z_{(s+ap)^{(r+aq)-1}, s+ap-1} >}$$

(4−20)

لكن

$$c_{((s+ap)^{(r+aq)-1}, s+ap-1),(s+ap)^{(r+aq)}} = \sqrt{2\beta}\,\frac{1.\beta}{(1+(r+aq)\beta)((s+ap)+\beta)} A_{r-(r+aq), s-(s+ap)}$$

كذلك

$$\frac{< Z_{(s+ap)^{(r+aq)}} \,|\, Z_{(s+ap)^{(r+aq)}} >}{< Z_{(s+ap)^{(r+aq)-1}, s+ap-1} \,|\, Z_{(s+ap)^{(r+aq)-1}, s+ap-1} >} = \frac{1}{4}\,\frac{(0+(r+aq))(1+(r+aq-1)\beta)(s+ap-1+\beta)(s+ap+0\beta)}{\beta}$$

(4−21)

وبالتعويض في المعادلة أعلاه ينتج لدينا :

$$L_1 | Z_{(s+ap)^{(r+aq)}} >= (r+aq)(s+ap)A_{r-(r+aq),s-(s+ap)}$$
$$\times Z_{(s+ap)^{(r+aq)-1},(s+ap-1)} | Z_{(s+ap)^{(r+aq)}} >$$

(4−22)

ومن تعريف الشعاع المنفرد $L_1 | Z_{(n+ap)^{(m+aq)}} >= 0$ فأن $A_{-aq,-ap} = 0$.

وأما اثر L_2 على $| Z_{(n+ap)^{(m+aq)}} >$ فبنفس الطريقة

$$L_2 | Z_{(s+ap)^{(r+aq)}} >= \frac{1}{2}(r+aq-1)(s+ap)\frac{(s+ap-1)(1+(r+aq)\beta)}{1+\beta}$$
$$\times A_{(r-(r+aq)),(s-(s+ap))} | Z_{(s+ap)^{(r+aq)-2},s+ap-2} >$$
$$-\frac{1}{2}(r+aq)(s+ap).\frac{(r+aq-1)(s+ap+2)}{1+\beta}$$
$$\times A_{(r-(r+aq)),(s-(s+ap))} | Z_{(s+ap)^{(r+aq)-2},(s+ap-1)^2} >$$

(4−23)

ومن الشرط $L_2 | Z_{(s+ap)^{(r+aq)}} >= 0$ ينتج $A_{-aq,ap} = 0$

وإذا أخذنا قيمة $\beta = 2$ حيث $p = 2, q = 1$ فإننا نتعامل مع نموذج $c = -2$ واخترنا الحالة ذات الوزن الأعلى $A_{2,3}$ كمثال للمستوى

$$k = rs = 2.3 = 6$$

ومن ثم فإن لدينا سلسلة من الأشعة المنفردة :

$$|Z_{3^2}>, |Z_{5^3}>, |Z_{7^4}>, |Z_{9^5}>, \ldots\ldots\ldots$$

(4−24)

مثال : أثر كل من L_1, L_2 على $|Z_{3.3,3}>$ والذي يأخذ تجزئة مستطيلة كما هو مبين في التخطيط

1.1	1.2	1.3
2.1	2.2	2.3
3.1	3.2	3.3

نحسب المعامل $c_{(3^{3-1},2),3^3}$ الناتج من تطبيق L_1

$$c_{(3^{3-1},2),3^3} = 2.\frac{1.2}{(1+(3-1)\beta)((3-1)+\beta)}A_{r-3.s-3}$$

(4−25)

وبوضع $\beta = 2$ تصبح المعادلة أعلاه:

$$c_{(3^{3-1},2),3^3} = \frac{1}{5}A_{r-3.s-3} \qquad (4-26)$$

بينما $\frac{< Z_{3^2} | Z_{3^3} >}{< Z_{3^2,2} | Z_{3^2,2} >}$ يعطى بالعلاقة

$$\frac{< Z_{3^2} | Z_{3^3} >}{< Z_{3^2,2} | Z_{3^2,2} >} = \frac{1}{4}\frac{(0+3\beta)(1+2\beta)(2+\beta)(3+0\beta)}{(0+\beta)(1+0\beta)}$$

(4−27)

مع ملاحظة أنه في كل مربع في التجزئة نضرب طول الهوك العلوي بطول الهوك السفلي حتى نصل المربع الأخير في معايرة البسط$< Z_{3^2} | Z_{3^3} >$ وكذلك بالنسبة للمقام $< Z_{3^2,2} | Z_{3^2,2} >$. وبتعويض $\beta = 2$

ينتج:

$$\frac{< Z_{3^2} | Z_{3^3} >}{< Z_{3^2,2} | Z_{3^2,2} >} = \frac{1}{4}\frac{6.5.4.3}{2.1} = 45$$

ومنها فأن:

$$L_1 Z_{3,3,3} | A_{r,s} >= 9A_{r-3,s-3} Z_{3,3,2} | A_{r,s} >$$

وأما بالنسبة لتأثير L_2 على $| Z_{3,3} >$ فإن:

$$c_{(3^2,1),3^3} = 2.2.\frac{(2+0\beta)(0+\beta)}{(2+2\beta)(1+\beta)}.\frac{1}{(1+2\beta)(2+\beta)} A_{r-3,s-3}$$

وبوضع قيمة $\beta = 2$ تصبح :

$$c_{(3^2,1),3^3} = \frac{1}{45} A_{r-3,s-3}$$

بينما $\frac{< Z_{3,3,3}, Z_{3,3,3} >}{< Z_{3,3,1}, Z_{3,3,1} >}$ و من العلاقة (4−15) فإنه يساوي:

$$\frac{< Z_{3,3,3}, Z_{3,3,3} >}{< Z_{3,3,1}, Z_{3,3,1} >} = \frac{945}{2}$$

كذلك بالنسبة لـ $c_{(3^2,1),3^3}$:

$$c_{(3,1^2),3^3} = -\frac{2.1.2\beta}{(1+\beta)(2+2\beta)} \cdot \frac{\beta}{(1+2\beta)(2+\beta)}$$

ومن ثم
$$c_{(3,1^2),3^3} = -\frac{1}{45}$$

وأما $\frac{< Z_{3,3,3}, Z_{3,3,3} >}{< Z_{3,2,2}, Z_{3,2,2} >}$ فإنه يساوي

$$\frac{< Z_{3,3,3}, Z_{3,3,3} >}{< Z_{3,3,1}, Z_{3,3,1} >} = \frac{675}{2}$$

و من ثم فإن اثر L_2 على $Z_{3,3,3} | A_{r,s} >$ يأخذ الشكل :

$$L_2 Z_{3,3,3} | A_{r,s} >= \frac{21}{2} A_{r-3,s-3} Z_{3,3,1} | A_{r,s} > + \frac{-15}{2} A_{r-3,s-3} Z_{3,2,2} | A_{r,s} >$$

وهذا لا يساوي صفر إلا إذا كانت المعاملات $A_{r-3,s-3}$ تساوي صفر ومن العلاقة (4.17) فإن هذا يحدث عند $r = 3, s = 3$ أي عند $A_{0,0}$

4-4 التباعد اللوغرتمي وتركيب خلية جوردان

Logarithmic Divergence and Jordan Cell

ان وجود التباعدات في دوال الإرتباط بدأت في بحث غوراي [Guarai(17)] لنموذج $(c=-2)$ و $(h=-\frac{1}{8})$ والنظريات التوافقية اللوغرتمية لها خصائص متنوعة وأهمها وجود تمثيل غير قابل لتخفيض .

وأنّ L_0 في موتّر الطاقة يظهر تركيب بلوك جوردان وهذا يقود إلى تعميم مجموعة من الأدوات : الحالات (الأشعة) الصفرية (null states)، دوال التجزئة والتي تستخدم في نظرية الحقل التوافقي الأصلية ،حيث أنّ الهاملتون $L_0-L_0^-$ يمكن أن يصبح كمصفوفة قطرية .

إن ظهور التمثيلات غير القابلة لتخفيض ناتج عن وجود اللوغرتيم في دوال الارتباط ذات الأربع نقاط وعند وجود حقلين توافقيين φ_i,φ_j يفترض بأن يكون التمهيد التوافقي ممكن ويؤدي إلى نشر ضرب المؤثرات(EOP)

$$\varphi_i(z)\varphi_j(w)=\sum\frac{c_n}{(z-w)^{h_i+h_j-h_n}}\varphi_n \qquad (4-28)$$

وعلى فرض وجود حقلين في النظرية وبنفس الأبعاد التوافقية فإنّ دالّة الارتباط لنقطتين تعطى بـ :

$$<\varphi(z)\varphi(0)>=z^{-2h}$$

إذا اعتبر نموذج $(c=-2),(h=-\frac{1}{8})$ تحت تأثير الزمرة الخاصة الخطية $SL(2,c)$ فإنّ الدالة لأربع نقاط للحقل φ تعطى بدلالة $F(x)$

$$<\varphi(z_1)\varphi(z_2)\varphi(z_3)\varphi(z_4)>=((z_1-z_2)(z_3-z_4))^{\frac{1}{2}}F(x) \qquad (4-29)$$

والمعادلة أعلاه (4-29) تعطي نشر سلسلة لورنتز للدالة $F(x)$ والتي هي أكثر عمومية وبالتالي يمكن تفسير ضرب المؤثرات وهذا ممكن إذا استخدمنا المستوى

الثلثي لهاملتون كالوغير و–ساذرلاند أو المستوى الث اني للشعاع المنفرد عند $h=-\frac{1}{8},c=-2$

$$HZ_{\lambda}(x)=\varepsilon(\beta)Z_{\lambda}(x)$$
$$\varepsilon(\beta)=\sum_{i=1}\lambda_i(\lambda_i-i+m-1) \qquad (4-30)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}Z_{\lambda}(x)+\sum_{i=1}^{m}x_i^2\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_i-x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}Z_{\lambda}(X)$$
$$\sum_{i=1}^{m}k_i(k_i-i+m-1))Z_{\lambda}(x) \qquad (4-31)$$

وعند m=2 نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية

$$x_1^2\frac{\partial^2 Z_{\lambda}(x)}{\partial x_1^2}+x_2^2\frac{\partial^2 Z_{\lambda}(x)}{\partial x_2^2}+\frac{x_1^2}{(x_1-x_2)}\frac{\partial Z_{\lambda}(x)}{\partial x_1}$$
$$-\frac{x_2^2}{(x_1-x_2)}\frac{\partial Z(x)}{\partial x_2}-\frac{1}{2}[\lambda_1^2+\lambda_1+\lambda_2(\lambda_2-1)]Z_{\lambda}(x)=0$$

(4-32)

وباستبدال $x_1+x_2=y,u=x_1x_2$ نجد أنّ

$$(u^2-2v)\frac{\partial^2}{\partial u^2}Z_{\lambda}+2v^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}Z_{\lambda}$$
$$+2uv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}Z_{\lambda}+u\frac{\partial}{\partial u}Z_{\lambda}+v\frac{\partial}{\partial v}Z_{\lambda}-[\lambda_1^2+\lambda_2(\lambda_2-1)]Z_{\lambda}=0$$

(4-33)

وبتعويض $r=2\frac{u}{\sqrt{\upsilon}},t=\sqrt{\upsilon}$ نحصل على :

$$(1-r^2)\frac{\partial^2}{\partial r^2}Z_\lambda - t^2\frac{\partial^2}{\partial t}Z_\lambda - 2r\frac{\partial Z_\lambda}{\partial r} + 2[\lambda_1^2 + \lambda_2(\lambda_2 - 1)]Z_\lambda = 0$$
(4−34)

وهذه المعادلة متجانسة في t ولذلك نضع

$Z_\lambda = t^{(\lambda)}f(r)$ ومنه نحصل على المعادلة الأصلية التالية:

$$(1-r^2)\frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial r^2} - 2r\frac{\partial f_\lambda}{\partial r} + [(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_2 + 1)]f_\lambda = 0$$

ثم نضع $w = \frac{1}{2}(1-r)$ كمتغير مستقل فتصبح المعادلة :

$$w(1-w)\frac{d^2 f}{dw^2} + (1-2w)\frac{df}{dw} + s(s+1)f = 0 \qquad (4-35)$$

حيث أن $s = \lambda_1 - \lambda_2$ وعند مقارنة المعادلة الأخيرة بالمعادلة العامة فوق الهندسية .

$$w(1-w)\frac{d^2 f}{dw^2} + [d - (u + d + 1)w]\frac{df}{dw} - abf = 0 \qquad (4-36)$$

نجد أنّ كثيرات حدود زونال متضمنة في حل المعادلة التفاضلية الهندسية

$$\begin{aligned} -s &= a, b = s + 1 \\ d &= 1 \end{aligned} \qquad (4-37)$$

والمعادلة التفاضلية الهندسية لها حلان مستقلان بدلالة الدالّة

$$\begin{aligned} f_1 &= f(a, b, d, w) \\ f_2 &= w^{t-d}\Gamma(a-d, b-d+1, 2-d, x) \end{aligned} \qquad (4-38)$$

[Erdelyi,.. (11)] وعند نشر (OPE) للحقل φ معادلة(29−4) ينتج :

$$\varphi(z)\varphi(0)=\frac{1}{z^{2h}}(I+z^{d-1}I')\qquad(4-39)$$

حيث I هو مؤثر الوحدة ، I' مؤثر شبيه غير قطري وهذا يؤدي إلى دخول اللوغريتم إذا كان I ، I' لهما نفس البعد التوافقي (d=1) أو أنّ I' له بعد توافقي لأحد المؤثرات المتحدرة من I .

والمعادلة أعلاه تحل بأكثر من طريقة منها طريقة فروبينوس والتي تتضمن الشكل $x^{\alpha}\sum_{n}a_{n}x^{n}$ وحل المعادلة الناتجة ل α عند $n=0$ وتؤدي إلى علاقة مرجعية للدالة فوق الهندسية

$$\alpha(\alpha-1+d)=0\qquad(4-40)$$

وحل المعادلة يتضمن $d=1,\alpha=1$ عند الحالة $c=2,h\ \frac{-1}{8}$

وبالتالي فإن حل المعادلة فوق الهندسية يقرأ كالتالي

$$\begin{aligned}&f(x)=F(s,s+1,1,x)\\&f(x-1)=Log(x)F(s,s+1,1,x)+H(x)\end{aligned}\qquad(4-41)$$

حيث أنّ $F(x)$ هي دالة فوق هندسية من ال درجة الثانية $H(x)$ دالة لوغرتمية حرة والحلين لديهما قطبية عند قيم معينة لـ x وفي حال خلية جورد ان في بعدين تظهر خاصيتان للمؤثر I' وتجمل كالتالي:

$$\begin{aligned}&L_{0}|\varphi>=h|\varphi>\\&L_{0}|\varphi'>=h|\varphi'>+|\varphi>\end{aligned}\qquad(4-42)$$

بينما تأثير مولدات فيراسورو على الحقل :

$$[L_n,\varphi]=(z^n+d_2^{n+1}+h(n+1)z^n)\varphi$$
$$[L_n,\varphi']=(z^n+d_2^{n+1}+h(n+1)z^n)\varphi'+(n+1)z^n\varphi \qquad (4\text{-}43)$$

وهنا φ هو الحقل الأساسي بينما φ' الشريك اللوغيرتمي والمعادلة الثانية ي تم الحصول عليها من اشتقاق الأولى بالنسبة ل h ،وكذلك $\frac{\partial\varphi}{\partial h}=\varphi'$

وفي العلاقة المرجعية عندما يكون الفرق بين الحلين عدد صحيح فـإنّ نشر ضرب المؤثرات لحقلين يصبح لوغرتمي وتركيب جوردان لـ L_0 في هذه الحالة يختلف، مع ملاحظة أنّ حل المعادلة المرجعية يزودنا ب أبعاد الحقل عند نشر المؤثرات لحقلين والذي يعني أنّ I' لها بعد توافقي صحيح بينما عند $d=m+1,m+z$ فأن I^1 لها بعد توافقي سالب وعند قيم سالبة لـ m فـإن I' لها بعد توافقي موجب وفي حالة $c=-2,h=1$ وبوضع $m<0$ فأن تأثير مولدات فيراسورو على الحالات:

$$L_0|\varphi|=|\varphi>$$
$$L_0|\varphi'>=|\varphi''>+|\varphi> \qquad (4\text{-}44)$$
$$L_1|\varphi'>=|\xi>.$$

إذا انتهت الحالة $|\varphi'>$ بالمؤثرات الموجبة فـإنها تسمى الحال ة شبه الأسا سية (quasi-primary) . وفي الحالة العامة تكون المعادلة التفاضلية التي تؤثر على $F(x)$ من الرتب العليا .

عودة إلى الحالة $m=0,d=1$ ومن [Erdelyi,... (11)] فأن حل المعادلة(4-36) الذي يكون منتظما عند $w=0$ يعطى بالعلاقة:

$$f(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nb_n}{d_nn!}w^n={}_2F_1(a,b,d,w) \quad (4.45)$$

حيث أنّ ${}_2F_1,(a,b,i,w)$ هي الدالّة فوق الهندسية وعند $a=s,b=s+1,d=1$ فأن

$$f(r) = F(s, s+1, 1, \frac{1-r}{2}) \qquad (4.46)$$

وباستخدام خصائص الدوال فوق الهندسية(Erdelyi1981p 111)

$$F(2d, 2e, d+c\frac{1}{2}, t) = F(d, e, d+e+\frac{1}{2}, 4t(1-t))$$

(4-47)

ولذلك فإن:

$$\begin{aligned} f(r) &= F(-s, s+1, 1, \frac{1-r}{2}) \\ &= F(\frac{-s}{2}, \frac{s+1}{2}, 1, 1-r^2) \end{aligned} \qquad (4.48)$$

ومن [Erdelyi,…(11)p 108]

$$F(a,b,d,t) = A_1 F(a,b,a+b-d+1, 1-t) + A_2 (1-t)^{d-a-b} F(d, a, d-b, d-a, b+1, 1-t)$$

(4-49)

حيث أن:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\Gamma(d)\Gamma(d-a-b)}{\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)} \\ A_2 &= \frac{\Gamma(d)\Gamma(d+a-d)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \end{aligned} \qquad (4-50)$$

فإن حل المعادلة (32−4) يمكن كتابته كالتالي:

$$F(\frac{-s}{2},\frac{s+1}{2},1,1-r^2)=A_1F(\frac{-s}{2},\frac{s+1}{2},\frac{1}{2},r^2)$$
$$+A_2rF(\frac{s+2}{2},\frac{1-s}{2},\frac{3}{2},z^2)$$

(4.51)

$$A_1\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{s+2}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})},A_2=\frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{-1}{2})}{\Gamma(\frac{-s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})}$$

ومن ثم فإنّ كثيرات حدود زونال المرتبة الثانية تعطي بالعلاقة:

$$\frac{Z_{\lambda_1,\lambda_2}(x)}{Z_{\lambda_1,\lambda_2}(I_2)}=$$
$$=(x_1x_2)^{|\lambda|/2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{-s}{2})\Gamma(\frac{1-2}{2})}F(\frac{2+s}{2},\frac{s+1}{2},\frac{1}{2},\frac{(x_1x_2)^2}{4x_1x_2})$$
$$+\frac{(x_1x_2)^{\frac{1}{2}(|\lambda|-1)}}{2(x_1x_2)^{-1}}\frac{\Gamma(1)\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{-s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})}F(\frac{2+s}{2},\frac{1-s}{2},\frac{3}{2},(\frac{(x_1x_2)^2}{4x_1x_2})$$

(4−52)

مع ملاحظة أنّ s هو عدد صحيح موجب وأن $Z_{\lambda_1,\lambda_2}(I)=2^{(\lambda_1+\lambda_2)}$.

وعند $\lambda_1=\lambda_2$ فـإنّ $Z_{\lambda,\lambda}(p)$ تمثل الشعاع المنفرد من الرتبة الثانية للنظرية $c=-2$. وإذا وضعنا الوزن التوافقي $h=-\frac{1}{8}$ فإننا نقترب عملياً من نموذج

شبكة بوليمرات مكثفة ($c=-2, h=-\frac{1}{8}$) في الحقل التوافقي.وهذا يعني أننا نستطيع أن ندرس أثر الكميات الفيزيائية الممثلة بالحقول على طول الترابط بين الجزيئات لهذه الشبكة باستخدام الشعاع المنفرد بدلالة كثيرات حدود زونال بدلاً من اللجوء إلى النموذج اللوغريتمي والتعامل مع حقل لوغريتمي مضاف للتغلب على مشكلة التطبيع(Normalization)، وكون المدى الواسع لكثيرات حدود زونال فإنّ هذا يمكن من دراسة شبكات ذات مساحات اكبر.

الفصل الخامس

الأشعة المنفردة بدلالة كثيرات حدود زورنال العقدية

Singular Vectors in term of complex Zonal polynomials

في هذا الفصل سنقوم ببناء الشعاع المنفرد باستخدام كثيرات حدود زونال العقدية وذلك عند وجود تفاعل بين حقل الجاذبية(Gravitation Field) وحقل المادة (Matter Field) ،وذلك باستخدام دوران الزمرة الخاصة المتعامدة SO(2,C) في الفضاء العقدي ،حيث الحالة الفيزيائية للاندفاع تتكون من جزأين ،الأول حقيقي يمثل المادة و آخر عقدي يمثل الجاذبية ،وباستخدام النموذج الحرج حيث أنّ الشحنة المركزية الكلية تساوي (26) ،وهي تتألف من جزأين أيضاً ،أحدهما يتعلق بحقل المادة c^M والثاني يتعلق بحقل الجاذبية (Liouville Field) c^L.

ومقدار الشحنة المركزية لحقل المادة $c^M \leq 1$ يحدد وجود تفاعل حقل الجاذبية مع المادة.عند $c^M = 1$ يتواجد الحقلان معاً دون تفاعل بينهما.

من خلال العلاقات (3-3),(3-7),(3—8),(3-11) سوف يتم استخدام كثيرات زونال العقدية الإبتدائية (تتكون من صف واحد) بعد تحليل كثيرات حدود زونال المجزأة . [Bouwknegt (4)]

عندما يكون مقدار الثابت $\beta = 1$ في كثيرات حدود زونال فإننا نتعامل مع كثيرات حدود زونال بدلالة الإحداثيات العقدية ،وهذا يمكننا من دمج خصائص لكثيرات حدود شور في كثيرات حدود زونال ،ومع ملاحظة أنه لن يتم الربط هنا بين نظرية الحقل التوافقي و نموذج كالوغيرو–ساذرلاند وإنما ربط نموذج(فيجن–فوتش) ونموذج فوك باستخدام جبر فيراسورو للحصول على الشعاع المنفرد عند أي مستوى من خلال تركيب خطي لكثيرات حدود زونال العقدية .

5-1 مولدات فيراسورو في حقل المادة:

قام بلوكنت[4] بالربط بين مقياس(فيجن_فوتش Feigen- Fucth) $F(P,Q)$ ونموذج فوك باستخدام جبر فيراسورو من خلال حقل قياسي(scalar field) $\varphi(z)$وفضاء فوك يبنى من الحالة الفراغية للاندفاع ($|P>$)،وشحنة مرجعية Q والتي هي عبارة عن حد ينتج عن التكميم الحقل الكلاسيكي وتعبر عن تفاعل اندفاع المادة واندفاع الجاذبية ، وشحنة مركزية $c=1-12Q^2$ ومن تعريف مولد فيراسورو :

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{k \in z} : a_k a_{n-k} : -n(n+1)Qa_n \qquad (5-1)$$

حيث أن a_κ مؤثر خافض و a_{-k} مؤثر رافع ،و n عدد صحيح .والعلاقة بين المؤثرين :

$$\begin{aligned} &[a_k , a_{-k}] = k \\ &[a_k , a_n] = k\,\delta_{k,-n} \end{aligned} \qquad (5-2)$$

بينما تأثير a_kعلى الحالة الفراغية $|P>$:

$$a_n |P>= 0 \qquad (5-3)$$

عندما تكون $n>0$. بينما عند $n=0$تصبح:

$$a_0 |P>= p|P> \qquad (5-4)$$

وبتأثير L_nعلى الحالة $P >$|في فضاء فوك وبالاستفادة من العلاقة(2−5) ينتج:

$$L_n \mid P >= \frac{1}{2}\sum_{k \in z} : a_k a_{n-k} : -n(n+1)Qa_n \mid P >= 0 \qquad (5-5)$$

لكل $n > 0$

وباستخدام العلاقة (2−5) نرى اثر المولد L_nعلى a_κ

$$[L_n , a_k] \mid P >= -ka_{k+n} - n(n+1)\delta_{n,-k} \qquad (5\text{-}6)$$

حيث أن δهي دلتا كرونكر ، وفي حالة التعويض عن $a_{-\kappa}$بدلالة متغير جديد لإدخال الشحنة المرجعية Q^M بحيث أن $x_\kappa = \frac{\sigma}{k} a_{-\kappa}, \sigma = \sqrt{2} Q_\pm$ تصبح العلاقة (5−6) بالشكل :

$$\begin{aligned} [L_n , x_k] \mid P &>= \frac{\sigma}{k}[L_n , a_{-k}] \mid P > \\ &= [(k-n)x_{k-n} + \sigma(P-kQ)\delta_{n,k}] \mid P > \end{aligned} \qquad (5-7)$$

مع ملاحظة أننا سنركز على القطاع المادي في الشحنة المرجعية ونشير إليها بالرمز Q^Mوكذلك بالنسبة للا ندفاع P^Mوالتي يأخذ حالات منفصلة تعتمد على محددات خاصة وبأعداد صحيحة موجبةr,s والتي تحدد مستوى الطاقة عند $C^M \leq 1$

والمولدات L_nتخضع العلاقة التبادلية (22−3)ولذلك عندما تكون m=n تصبح العلاقة :

$$[L_n , L_n] = 0 \qquad (5-8)$$

وعندما تكون $n \neq m$تصبح بالشكل :

$$[L_n , L_m] = (n-m)L_{n+m} \qquad (5-9)$$

ولذلك يمكن أن تولد جميع المولدات الأخرى ، فمثلا إذا كانت $n=-1, m=1$ فإنّ العلاقة السابقة تعطي $[L_1, L_{-1}]=2L_0$، والمؤثر L_0 يمثل الهاملتون بحيث أنّ :

$$[L_0 \mid P >= h \mid P > \qquad (5-10)$$

وإذا وضعنا $n=1, m=2$ فإنه تعطي $[L_1, L_2]=L_3$ وهذا يجعلنا نكتفي بالمؤثرين L_1, L_2

العلاقة (7-5) تصبح عند استخدام المؤثر L_1 :

$$[L_1, x_k]=(k-1)x_{k-1}+\sigma(P-Q) \qquad (5-11)$$

وعندما تكون x تحتوي عددا كبيرا من المتغيرات $x=(x_1, x_2........, x_\kappa, ...)$ فإنّ اثر L_1 على x يأخذ الشكل :

$$[L_1, x]=\sum_{j=1}^{\infty} jx_j \frac{d}{\partial x_{j+1}} x_{j+1}+2Q_+(P-Q)\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \delta_{j,1}$$

(5-12)

وهو ما يجعلنا نكتب L_1 على شكل مشتقة :

$$[L_1, f(x)]=[\sum_{j=1}^{\infty} jx_j \frac{d}{\partial x_{j+1}}+2Q_+(P-Q)\frac{\partial}{\partial x_1}]f(x)$$

(5-13)

وإذا أثرنا على الاقتران $g(x)$ بالمؤثر L_1 باستخدام العلاقة التبادلية $[L_1, g(x)]$ على الحالة $|P>$ فإنه يعطينا :

$$[L_1, g(x)]|P> = (L_1 g(x) - g(x)L_1)|P>$$
$$= [\sum_{j=1} jx_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} g(x) + \sqrt{2} Q_+ (P-Q) \frac{\partial}{\partial x_1} g(x)]|P>$$

(5-14)

حيث أن الحد $g(x)L_1|P>$ يساوي صفر . وبالنسبة للمؤثر L_2 فإنه يمكن تحويله إلى صيغة مشتقة بنفس الطريقة ويصبح الشكل عند التأثير به على $g(x)$:

$$[L_2, g(x)] = \sum_{j=1} jx_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} g(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma (P - kQ) \frac{\partial}{\partial x_2} g(x)$$
$$+ \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2_1} g(x) + \sigma^2 g(x) \frac{\partial}{\partial x_1}$$

(5-15)

5-2 أثر L_1, L_2 على كثيرات حدود زونال العقدية :

Action of L_1, L_2 on complex Zonal polynomials

سنبحث بداية أثر كل من L_1, L_2 على اقتران زونال دون تجزئة $Z_\kappa(x)$ باستخدام العلاقة(5-13) وصفة كثيرات زونال الأولى من العلاقة (2-12) والصفة الثانية من العلاقة (2-16) فإن أثر L_1 على $Z_\kappa(x)$ يصبح :

$$
\begin{aligned}
&[L_1, Z_k]|P> = (L_1 Z_k - Z_k L_1)|P> \\
&= L_1 Z_k \;|P> \\
&= \sum_{j=1} j x_j Z_{k-j-1}(x) + \sqrt{2} Q_+ (P-Q) Z_{k-1}(x)|P> \\
&= [(k-1) + \sqrt{2} Q_+ (P-Q)] Z_{k-1}(x)|P>
\end{aligned}
$$

(5−16)

وهذا يعني أنّ L_1 يعمل كمؤثر خافض بمقدار واحد على كثيرات حدود زونال ، وعند التأثير بالمؤثر L_2 وباستخدام العلاقة (2−13) والصفتين الأولى والثانية لكثيرات حدود زونال فإنّ النتيجة تكون على الشكل :

$$
\begin{aligned}
&[L_2, Z_k]|P> = L_2 Z_k \;|P> \\
&= \sum_{m=j+1} (m-1) x_{m-1} Z_{k-m-1}(x) + \sqrt{2} Q_+ (P-Q) Z_{k-2}(x) + 2 Q_+^2 Z_{k-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_1} |P> \\
&= \{[(k-1) + \sqrt{2} Q_+ (P-Q)] Z_{k-2}(x) + 2 Q_+^2 Z_{k-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_1}\} |P>
\end{aligned}
$$

(5−17)

وهو ما يجعل L_2 يعمل كمؤثر خافض لكثيرات حدود زونال بمقدار رتبتين

أما بالنسبة للحد الثاني في الطرف الأيمن للمعادلتين السابقتين فـإنه يمكن التعبير عنه بدلالة متغيرات جديدة r,sوهي أعداد صحيحة موجبة $r,s>0$ وبدلالة الهزازات $Q_\pm$ التي تبين الاندفاع للحالات المنفصلة . ثمّ التعبير عن مستويات هذه الحالات. ويتم ذلك من خلال العلاقات (3−13),(3−11) وعند $r=1,s$ أي للمستوى s تصبح العلاقة (3−11) بالشكل :

$$\sigma(P^{M}(1,s)-Q^{M})=\frac{Q_{+}}{\sqrt{2}}[(s-1)(Q^{M}-iQ^{L})]$$
$$=1-s$$

(5−18)

والمعادلة أعلاه تبين ارتباط الاندفاع في القطاع المادي مع كل من الحقل ليوفيل وحقل المادة من خلال الشحنة المرجعية لكل منهما عند المستوى s . بينما في حالة الحقل الحر (free field) فإن الاندفاع يرتبط مع حقل ليوفيل حيث تكون $Q^{M}=0$ ولذلك يبقى اندفاع ليوفيل بالشكل :

$$P^{L}(1,s)=\frac{1}{2}(1+s)Q^{L} \qquad (5-19)$$

ولذلك يمكن كتابة المعادلتين (5−16)،(5−17) بدلالة k,s :

$$[L_{1},Z_{k}(x)]=(k-s)Z_{k-1}(x)$$
$$[L_{2},Z_{k}(x)]=(k-s)Z_{k-2}(x) \qquad (5-20)$$

والمعادلة الأخيرة تجعل $n=1,2, L_{n}Z_{\kappa}(x)$ كمؤثر خافض وعند المستوىk=s يكون الشعاع المنفرد $Z_{s}(\frac{\sqrt{2}Q_{+}}{n}P_{-n}^{M})|P^{M}>$

5−3 أثر L_1 على كثيرات حدود زونال المجزئة :

تعرف كثيرات حدود زونال بدلالة اقتران زونال الابتدائي من العلاقة (2−11) سنبدا بدراسة اثر L_1 على التجزئات $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$........ بطريقة الاستقراء.

كثيرة الحدود $Z_{\lambda_1,\lambda_2.}$;تأخذ الشكل $Z_{\lambda_1,\lambda_2.}=Z_{\lambda_1}Z_{\lambda_2}-Z_{\lambda_1,+1}Z_{\lambda_2-1}$ وعند التأثير عليها بالمؤثر L_1 باستخدام خاصية التوزيع والعلاقة (14−2) ثم تجميع الحدود المتشابهة ينتج :

$$
\begin{aligned}
&[L_1, Z_{\lambda_1,\lambda_2}] = [L_1, Z_{\lambda_1}]Z_{\lambda_2} + Z_{\lambda_1}[L_1, Z_{\lambda_2}] \\
&-[L_1, Z_{\lambda_1+1}]Z_{\lambda_2-1} - Z_{\lambda_1}[L_1, Z_{\lambda_2}] \\
&= [\lambda_1 - 1 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1-1,\lambda_2} \\
&+[\lambda_2 - 2 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2-1}
\end{aligned}
$$

(5-21)

وعندما يكون عدد التجزئات (3) $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ فإننا نستطيع مشاهدة اثر L_1 على $Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}$ باستخدام العلاقة السابقة ، وتكون النتيجة:

$$
\begin{aligned}
&[L_1, Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}] = \\
&[\lambda_1 - 1 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1-1,\lambda_2,\lambda_3} \\
&+[\lambda_2 - 2 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3} \\
&+[\lambda_3 - 3 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3-1}
\end{aligned}
$$

(5-22)

وبما أنّ التجزئة مرتبة تنازليا فإننا نستخدم صفة أخرى لكثيرات حدود زونال

$Z_{\lambda_1,\ldots,\lambda-1,\lambda,\ldots,\lambda_n} = 0$

وأما بالنسبة لأربع تجزئات $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ فإن اثر L_1 على $Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}$ بعد عمليات جبرية طويلة يأخذ الشكل:

$$
\begin{aligned}
&[L_1, Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}] = \\
&[\lambda_1 - 1 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1-1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4} \\
&+[\lambda_2 - 2 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3,\lambda_4} \\
&+[\lambda_3 - 3 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3-1,\lambda_4} \\
&+[\lambda_4 - 4 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4-1}
\end{aligned}
$$

(5−23)

من العلاقات (23,22,21) نلاحظ أنّ أثر L_1 على التجزئة يؤدي إلى نقصان التجزئة بمقدار (1) ،لاحقاً سيتم فك كثيرات زونال إلى كثيرات ابتدائية لها تجزئة صف واحد.

وبشكل عام لأي تجزئة $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,.........,\lambda_n$ فإن اثر L_1 كثيرات حدود زونال :

$$
[L_1, Z_{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n}] = \sum_{j=1}^{n}[(\lambda_j - j) + \sigma(P-Q)]Z_{\lambda_1,...,\lambda_j-1,...,\lambda_n}
$$

(5−24)

5−4 أثر L_2 على كثيرات حدود زونال

بالنسبة لأثر L_2 فإننا نستخدم العلاقة(24−1) والعلاقة (15−2) وخاصيتي التوزيع والتجميع ثم تنظيم الحدود المتناسقة :

- **أثر** L_2 **على** Z_{λ_1,λ_2}.

$$
\begin{aligned}
&[L_2, Z_{\lambda_1,\lambda_2}] = [L_2, Z_{\lambda_1}]Z_{\lambda_2} + Z_{\lambda_1}[L_2, Z_{\lambda_2}] \\
&-[L_2, Z_{\lambda_1+1}]Z_{\lambda_2-1} - Z_{\lambda_1}[L_2, Z_{\lambda_2}] \\
&= [\lambda_1 - 1 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1-2,\lambda_2} \\
&+[\lambda_2 - 2 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2-2} \\
&+(\sigma^2 - 1)Z_{\lambda_1-1,\lambda_2-1} + \sigma^2 Z_{\lambda_1,\lambda_2-1}\frac{\partial}{\partial x_1}
\end{aligned}
\qquad (5-25)
$$

- أثر L_2 على $Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}$.

$$
\begin{aligned}
&[L_2, Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}] = \\
&[\lambda_1 - 1 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1-2,\lambda_2,\lambda_3} \\
&+[\lambda_2 - 2 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2-2,\lambda_3} \\
&+[\lambda_3 - 3 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3-2} \\
&+(\sigma^2-1)\{Z_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3-1} + Z_{\lambda_1-1,\lambda_2,\lambda_3-1} + Z_{\lambda_1-1,\lambda_2-1,\lambda_3}\} \\
&+\sigma^2 Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3-1}\frac{\partial}{\partial x_1}
\end{aligned}
\tag{5-26}
$$

أثر L_2 على $Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}$.

$$
\begin{aligned}
&[L_2, Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}] = \\
&[\lambda_1 - 1 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1-2,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4} \\
&+[\lambda_2 - 2 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2-2,\lambda_3,\lambda_4} \\
&+[\lambda_3 - 3 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3-2,\lambda_4} \\
&+[\lambda_4 - 4 + \sqrt{2}Q_+(P-Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4-2} \\
&+(\sigma^2-1)\{Z_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3-1,\lambda_4} + Z_{\lambda_1-1,\lambda_2,\lambda_3-1,\lambda_4} + Z_{\lambda_1-1,\lambda_2-1,\lambda_3,\lambda_4} \\
&+Z_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3,\lambda_4-1} + Z_{\lambda_1-1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4-1} + Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3-1,\lambda_4-1}\} \\
&+\sigma^2 Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4-1}\frac{\partial}{\partial x_1}
\end{aligned}
$$

(5−27)

ونستخدم صفة كثيرات حدود زونال:

$$Z_{\lambda_1,\ldots\ldots,\lambda-2,\lambda,\ldots\ldots,\lambda_n} = -Z_{\lambda_1,\ldots\ldots,\lambda-1,\lambda-1,\ldots\ldots,\lambda_n} \quad (5-28)$$

نلاحظ ازدياد عدد الحدود بـازدياد التجزئات وذلك لأنّ التباديل (permutation) بدلالة اقترانات زونال الابتدائية تزداد بشكل كبير بينها . ولذلك ف إن أثر L_2 على $Z_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots\ldots,\lambda_n}$:

$$[L_2, Z_{\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_n}] = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_i - i + \sigma(P-Q)) Z_{\lambda_1,....,\lambda_i-2,....,\lambda_n}$$
$$+(\sigma^2-1) \sum_{1 \le i \le j \le n} Z_{\lambda_1,....,\lambda_i-1,...,\lambda_j-1,....,\lambda_n}$$
$$+\sigma^2 Z_{\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_n-1} \frac{\partial}{\partial x_1}$$

(5-29)

5-5 كثيرات حدود زونال العقدية كأشعة منفردة :

Complex Zonal polynomials as singular vectors

5-5-1 اقتران حقل الجاذبية مع المادة التوافقية

Gravity coupled to conformal matter

عندما تكون قيمة $\beta=1$ فإن كثيرات حدود زونال $Z_\lambda^{\beta=1}(x)$ تصبح بدلالة الإحداثيات العقدية . وكذلك يمكننا أن نعتبر كوهومولوجي $BRST$ لجبر فيراسورو $\mathrm{H}(vir, M)$ لأي نموذج لفيراسورو M مع وجود موتّر الطاقة $T(z)$ والشحنة المركزية الكلية c=26 .

يعطى مؤثر $BRST$ بالعلاقة :

$$d = \int \frac{d_z}{2\pi i} (T(z) + \tfrac{1}{2} T(z)) c(z) \qquad (5-30)$$

والذي يؤثر $\mathrm{M} \otimes F^G$ حيث أنّ F^G هو نموذج فوك الفيرم يني الخاص بأعداد شبح (ghosts) (b,c) وموتّر الطاقة $T^G(z)$ و M موتّر لاثنين من نماذج فيجن –

فونتش $M = F^G \otimes F^L$ وفي الحقل الحر للجاذبية الكمومية في بعدين المقترنة مع المادة التوافقية فــإنّ F^M متعلق بالمادة و F^L يتعلق بحقل لوفيل للجاذبية L, M للمادة و L حقل لوفيل . نموذج فيجن فيتش F يفسر بمحددين الشحنة المرجعية Q والاندفاع P ويتعلق أيضاً بحقل سلّمي $\varphi(z)$ وموتّر الطاقة يعطى بالعلاقة :

$$T(z) = \tfrac{-1}{2} : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) : + i\,\partial^2\varphi(Z) \qquad (5-31)$$

وهو يعرّف أثر جبر فيراسورو. والشحنة المركزية c والوزن التوافقي h في الفراغ تعطى بالعلاقات :

$$\begin{aligned} c &= 1 - 12Q^2 \\ h &= \tfrac{-1}{2} P\,(\mathrm{P} - 2Q) \end{aligned} \qquad (5-32)$$

وإذا اعتبرنا الاندفاع المزاح بمقدار Q يعطى بالعلاقة :

$$P = (p - Q) \qquad (5-33)$$

وبالتالي فـإن نموذج فيجن – فوتش يصبح بدلالة (P, Q) وإذا كانت الشحنة المركزية الكلية في حالة الجاذبية $c = 26$ فلإننا نركز على الشحنة المركزية المتعلقة بالمادة

$$c^M = 1 - 12(Q^M)^2 \qquad (5-34)$$

ومن الشرط (4-3) فلإننا نحصل على العلاقة التركيبية

$$Q_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^M \pm iQ^L) \qquad (5-35)$$

والشرط $c^M + c^L = 26$ يعطي

$$Q_+ Q_- = -1 \qquad (5-36)$$

وإذا أدخلنا محددات جديدة حقيقية r,s بالتعريف :

$$r=\frac{-1}{2}Q_{-}P^{+},s=\frac{-1}{2}Q_{+}P^{-} \qquad (5-37)$$

ومن ثم يمكن كتابة الاندفاع .. بدلالة r,s

$$\begin{aligned}P^{M}_{(r,s)}&=\tfrac{1}{2}[(r,s)Q^{M}+(r,s)2Q^{2}]\\ iP^{L}_{(r,s)}&=\tfrac{1}{2}[(r-s)Q^{M}+(r+s)iQ^{L}]\end{aligned} \qquad (5-38)$$

وإذا اعتبرنا أن كثيرات حدود زونال العقدية الابتدائية $Z_{\lambda}^{\beta=1}(x)$ تعرف من خلال الدالّة المولدة .

$$\exp^{(\sum_{k\in N}t^{k}x_{k})}=\sum_{k\in z}t^{K}z_{k}^{1}(x) \qquad (5-39)$$

والذي يتضمن

$$\begin{aligned}Z_{\lambda}^{1}(x)&=0,\lambda<0\\ Z_{0}^{1}(x)&=1\end{aligned} \qquad (5-40)$$

ومن خصائص كثيرات حدود زونال الحقيقية التي تنطبق على كثيرات زونال العقدية .

$$\begin{aligned}(trace(x))^{\kappa}&=\sum Z_{\lambda}^{1}(x)\\ (x_{1}+x_{2}+......)^{k}&=\sum Z_{\lambda}^{1}(x)\end{aligned} \qquad (5-41)$$

ولكل تجزئة $\lambda=\{\lambda_1\geq\lambda_2\geq......\}$.فإنّ كثيرات حدود زونال العقدية المجزأة تعرف كالتالي :

$$Z_{\lambda}^{1}(x)=Z_{\lambda_1,\lambda_2,.....,\lambda_n}(x)=\det(Z_{\lambda_i-i+j}) \qquad (5-42)$$

إذا أعدنا تعريف الإحداثيات x_{κ} بدلالة الاندفاع p واستخدام جبر هايزنبرغ

$$[P_{i},P_{n}]=\kappa\delta_{\kappa,-n} \qquad (5-43)$$

بحيث أنّ $x = x_\kappa = \sqrt{2}\frac{Q_+}{k}\mathrm{P}_{-k}$ ، وتأثير P_n على الحالة $|P>$

$$P_n\,|P>=0, n>0 \qquad (5\text{–}44)$$
$$P_o\,|P>=P\,|P>$$

ولذلك يمكن كتابة مولدات فيراسورو بدلالة P_n

$$L_n = \tfrac{1}{2}\sum_{kez} : p_k\, p_{n-k} : -(n+1)Q^M p_n \qquad (5\text{–}45)$$

ومن ثم :

$$[L_n, x_\kappa] = (k-n)x_{\kappa-n} + \sqrt{2}Q_+(\mathrm{P}-\kappa Q)\delta_{n,\kappa} \qquad (5\text{–}46)$$

وذا أخذنا بالاعتبار دالة مثل $f(x)$ حيث أن $x=(x_1,x_2,...)$ نحصل على اثر L_2, L_1 على الدالة $f(x)$

$$[L_1, f(x)] = \sum_{j=1}^{\infty} jx_j \frac{df}{\partial x_{j+1}} + 2Q_+(P-Q)\frac{\partial f}{\partial x_1} \qquad (5\text{–}47)$$

وبعد حسابات يدوية نحصل على :

$$[L_2, f(x)] = \sum jx_j \frac{df}{i\,\partial x_{j+2}} + 2Q_+(P-Q)\frac{\partial f}{\partial x_2} + 2Q_+^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2Q_+^2\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}$$
$$(5\text{–}48)$$

من الخصائص الأساسية لكثيرات زونال العقدية

$$\frac{\partial}{\partial x_n} Z_\kappa^1(x) = Z_{\kappa-n}^1(x) \qquad (5\text{–}49)$$

من مولدات فيراسورو في العلاقة (5–47) على نحصل على الشعاع المنفرد

$$[L_1, Z_k^1(x)] = \sum_{j=1}^{\infty} jx_j \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} Z_\kappa^1(x) + \sqrt{2}Q_+(P-Q)\frac{\partial}{\partial x_1} Z_\kappa^1(x)$$

(5−50)

وبوضع $m = j + 1$ نحصل على:

$$L_1 Z_{\kappa}^{1}(x) = \sum_{m=j+1}^{\kappa} (m-1) x_{m-1} Z_{\kappa-m}^{1}(x) \sqrt{2} Q_{+} (P - Q) Z_{\kappa-1}^{1}(x)$$

(5−51)

لكن من الخاصية في العلاقة (2−11) ينتج :

$$L_1 Z_{\kappa}^{1}(x) = [(\kappa - 1) + \sqrt{2} Q_{+} (P - Q)] Z_{\kappa-1}^{1}(x) \qquad (5-52)$$

كذلك بتطبيق L_2 على $Z_{\kappa}^{1}(x)$ نحصل على :

$$[L_2, Z_{\kappa}^{1}(x)] = [(\kappa - 1) + \sqrt{2} Q_{+} (P - Q)] Z_{\kappa-2}^{1}(x) \qquad (5-53)$$

لكن المقدار $\sqrt{2} Q_{+} (P^M - Q^M)$ من العلاقات (3−7)،(3−11) يصبح:

$$\begin{aligned} (P^M - Q^M) &= \frac{1}{2}[(r+s)Q^M + (r-s)iQ^L] \\ &= \frac{1}{2}(Q^M + iQ^L) + s(Q^M + iQ^L) - 2Q^M \end{aligned} \qquad (5-54)$$

لكن:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} Q_{+} &= Q^M + iQ^L \\ \sqrt{2} Q_{-} &= Q^M + iQ^L \\ Q^M &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{+} + Q_{-}) \end{aligned} \qquad (5-55)$$

ومنها يصبح المقدار $\sqrt{2}Q_+(P^M(r,s)-Q^M)$ بشكل عام :

$$\sqrt{2}Q_+(P^M - Q^M) = rQ_+^2 - s - Q_+^2 + 1 \\ = (r-1)Q_+^2 - s + 1 \qquad (5-56)$$

وعندما تكون $r=1$ فإنّ كثيرات حدود زونال العقدية تكون أساسية للمستوى s

بحيث $Z_k(x) = Z_s(\frac{\sqrt{2}Q_+}{n}P_{-n}^M), r=1, \sqrt{2}Q_+(P_{(1,s)}^M - Q_{-n}^M) = 1-s$

وبتطبيق L_1 على $Z_k(\frac{\sqrt{2}Q_+}{n}P_{-n}^M)$:

$$L_1 Z_k(\frac{\sqrt{2}Q_+}{n}P_{-n}^M) = (k-1-s+1)Z_{k-1}(\frac{\sqrt{2}Q_+}{n}P_{-n}^M) \\ = (k-s)z_{k-1}(\frac{\sqrt{2}Q_+}{n}P_{-n}^M) \qquad (5-57)$$

وإذا كانت Z_s^1 شعاع منفرد فإنّ :

$$L_1 Z_s^1 = 0 \qquad (5-58)$$

وهذا يتم عندما $k=s$

$$V_{1,s} = Z_s^1(\frac{\sqrt{2}Q_+}{n}P_{-n}^M) \,|\, P_{-n}^M > \qquad (5-59)$$

وهذا الشعاع بتجزئة صف واحد من تخطيط يونغ المرتب.

وعند $r,s=1$ فإننا نضع الهزاز السالب $x_n = \frac{\sqrt{2}Q_-}{2}P_{-n}^M$

$$\upsilon_{r,1} = Z_r^1(\frac{\sqrt{2}Q_-}{n}P_{-n}^M) \,|\, P_{-n}^M > \\ L_1 \upsilon_{r,1} = 0 \qquad (5-60)$$

[Bouwknegt (4)]

عند $c<1$.وبشكل عام:

$$L_n V_{r,1} = 0, n = 1,2 \qquad (5-61)$$

وإذا كانت الشحنة المركزية $c=1$ فإنّ $Q_{\pm} = \pm 1, Q^M = 0$ ومن نموذج $Q_{\pm} = \sqrt{\frac{P}{q}}, (p,q)$ للحالات المنفصلة يكون $P=q=1$ عند $c=1$

ومن ثم يصبح الشعاع المنفرد عند المستوى rs :

$$\begin{aligned} V_{rs}^{c=1} &= Z_{s,r}^{\beta=1}(x) \,|\, P_{-n}^{M} > \\ &= Z^{B=1}_{\underbrace{s,s,s,\ldots\ldots,s}_{r}} \left(\frac{\sqrt{2}}{n} P_{-n} \right) |\, P_{-n}^{M} > \end{aligned} \qquad (5-62)$$

وبتطبيق L_1, L_2 عليه

$$\begin{aligned} L_1 V_{rs}^{c=1} &= 0 \\ L_2 V_{rs}^{c=1} &= 0 \end{aligned} \qquad (5-63)$$

وأما بالنسبة لكثيرات حدود زونال العقدية والمجزئة $Z^{B=1}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots,\lambda_\kappa}(x)$ فأنها تعطي بدلالة كثيرة حدود زونال العقدية الإبتدائية كمحددة :

$$Z^{B=1}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots,\lambda_\kappa}(x) = \det\left(Z_{\lambda_i - i + j}(x) \right) \qquad (5-64)$$

مثال:

$$Z^{B=1}_{\lambda_1,\lambda_2}(x) = \begin{vmatrix} Z_{\lambda_1} & \lambda_{\lambda_1+1} \\ \lambda_{2-1} & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= z_{\lambda_1} z_{\lambda_2} - z_{\lambda_{2-1}} z_{\lambda_{1+1}} \\ L_1 Z^{b+1}_{\lambda_1,\lambda_2}(x) &= L_1 (z_{\lambda_1} z_{\lambda_2} - z_{\lambda_{2-1}} z_{\lambda_{1+1}}) \end{aligned}$$

وباستخدام خاصية التوزيع . واثر L_1 على $Z^{B=1}_{\lambda_1}(x)$ الابتدائية

$$[L_1, Z_{\lambda_1,\lambda_2}] = [(\lambda_1 - 1) + \sqrt{2}Q_+(P - Q)]Z_{\lambda_1 - 1,\lambda_2}$$
$$+[(\lambda_1 - 2) + \sqrt{2}Q_+(P - Q)]Z_{\lambda_1,\lambda_2 - 1}$$

(5−65)

وبشكل عام فإن :

$$[L_1, Z_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots}] = \sum_{i=1}[(\lambda_i - i) + \sqrt{2}Q_+(P - Q)]Z^{\beta=1}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_i - 1,\ldots}(x)$$

(5−66)

وكذلك فإنّ اثر L_2 على $Z_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots\lambda_\kappa}$ وبعد إجراء حسابات يدوية طويلة نحصل على:

$$[L_2, z_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots\lambda_\kappa}] = \sum_{i=\kappa}^{m}(\lambda_i - 1 + \sqrt{2}Q_+[P - Q])Z_{\lambda_1,\ldots,\lambda_i - 1,\ldots\lambda_m}(x)$$
$$+(2Q_+^2 - 1)\sum_{1\le i<j\le n} Z^{B=1}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_i - 1,\ldots\ldots,\lambda_\kappa}$$

(5−67)

5−5−2 الشعاع المنفرد عند المستوى $s, r = 2$:

سوف نستخدم التحليل اليدوي لحساب المعاملات، في هذه الحالة يكون عدد التجزئات(2) والمقدار $\sqrt{2}Q_+(P^M_{(2,s)} - Q^M)$ يعطي بالعلاقة:

$$\sqrt{2}Q_+(P^M_{(2,s)} - Q^M) = Q_+^2 - s + 1 \qquad (5−68)$$

لتسهيل التعامل مع هذا الحد نضع $\sqrt{2}Q_{+}(P^{M}_{(2,5)} - Q^{M}) = t_{\pm} + 1$ وعند $r = s = 2$ نتعامل مع المستوى الرابع للشعاع المنفرد $[\kappa = rs = 4]$ وإجراء جميع التباديل المرتبة تنازلياً على كثيرات حدود زونال العقدية فإن الشعاع المنفرد ينتج من التركيب الخطي لها ويأخذ الشكل:

$$V_{2,2} = [\alpha_0^2 Z_{4,0}(x) + \alpha_1^2 Z_{3,1}(x) + \alpha_2^2 z_{2,2}(x)] | P^M >$$

(5−69)

ولحساب المعاملات $\alpha_2^2, \alpha_1^2, \alpha_2^2$ فأننا نطبق المؤثر L_1 على الشعاع المنفرد بحيث أنّ:

$$L_1 V_{2,2} = 0 \qquad (5-70)$$

باستخدام العلاقة (5−70) تنتج قيم المعاملات أعلاه بدلالة α_0^2 كالتالي :

$$\alpha_1^2 = \frac{-(t+4)}{t}\alpha_0^2, \alpha_2^2 = \frac{(t+4)(t+3)}{t(t+1)}\alpha_0^2$$

وعندما تكون $r = 2, s = 3$ يصبح شكل الشعاع المنفرد

$$V_{2,3} = \alpha_0^3 z_{6,0}(x) + \alpha_1^3 z_{3,1}(x) + \alpha_2^3 z_{4,2}(x) + \alpha_3^3 z_{3,3}(x)$$

(5−71)

انظر .[شعير،دوبريف وكانو (6)]

وبتطبيق L_1 تنتج المعاملات:

$$\alpha_1^3 = \frac{-(t+6)}{t}\alpha_0^3, \alpha_2^3 = \frac{(t+6)(t+5)}{t(t+1)}\alpha_0^3$$

$$\alpha_3^3 = \frac{-(t+6)(t+5)(t+4)}{t(t+1)(t+2)}\alpha_0^3$$

وعند المستوى .$\kappa = 8, r = 2, S = 4$ فإن الشعاع المنفرد يأخذ الشكل

$$V_{2,4}=\alpha_0^4 Z_{8,0}(x)+\alpha_1^4 Z_{7,1}(x)+\alpha_2^4 Z_{6,2}(x)$$
$$+\alpha_3^4 Z_{5,3}(x)+\alpha_4^4 Z_{4,4}(x)$$

(5-72)

والمعاملات بدلالة α_0^4

$$\alpha_1^4=\frac{-(t+8)}{t}\alpha_0^4,\alpha_2^4=\frac{(t+8)(t+7)}{t(t+1)}\alpha_0^4$$

$$\alpha_1^4=\frac{-(t+8)(t+7)(t+6)}{t(t+1)(t+2)}\alpha_0^4$$

$$\alpha_4^4=\frac{(t+8)(t+7)(t+6)(t+5)}{t(t+1)(t+2)(t+3)}\alpha_0^4$$

نلاحظ هنا أن عدد الحدود في هذه الحالات يساوي (2s+1) عندما $r=2$
وبعملية الاستقراء نستطيع كتابة الشعاع المنفرد للمستوى $2s$ بالشكل :

$$V_{2,s}=\sum_{i=\vartriangle}^{s} a_i^s Z_{2s-i,i}^{\beta=1}(\frac{\sqrt{2}}{n}Q_+P_{-i}^M)|P^M> \qquad (5-73)$$

أو بالنسبة للإشارة في الهزاز السالب Q_- يصبح :

$$V_{r,2}=\sum_{i=0}^{s}\alpha_i^r Z_{2r-i,i}^{\beta=1}(\frac{\sqrt{2}}{i}Q_-P_{-i}^M)|P^M> \qquad (5-74)$$

والمعاملات α_i^m تأخذ الشكل :

$$\alpha_i^M=\frac{(-1)(t+2m)(t+2m-1).....(t+2m-L+1)}{t(t+1)......(t+1-1)} \qquad (5-75)$$

حيث أنّ $m=s$ في الجزء الموجب من الهزاز و $m=r$ في الجزء السالب منه ومقدار الثابت يتم اختياره بحيث لا يحدث انفجار في المعاملات α_l^m وبعد إجراء عمليات جبرية طويلة واستخدام دالة جاما (Gamma function) فإن المعاملات تأخذ الشكل :

$$\alpha_i^M = \frac{(-1)\Gamma[2(t+m)]}{\Gamma(t+1)\Gamma(t+2m-1+1)} \qquad (5-76)$$

في بعض الحالات لقيم t تصبح بعض المعاملات تس اوي صفر ولذلك عند $l=1-t$ ما عدا الحد α_m^m. كذلك في نموذج (1,q) لفضاء فوك تكون $t_+ = q-s$ بينما في النموذج ($p,1$) تكون $t_- = p-r$ تبعا للهزاز $Q_\pm$ مع الملاحظة أنّ هذه الصيغة باستخدام دالة جاما تتطلب قيماً لـ $t_\pm$ بحيث تكون أعداداً غير صحيحة .وأما عندما تكون c=1 حيث :

$$p = q = 1, Q_\pm = \pm 1, Q^M = 0$$

فإن جميع المعاملات تساوي صفر ما عدا الحد α_m^m ، وتعود للعلاقة :

$$\begin{aligned} \upsilon_{r,s} &= S_{s^r}\left(\frac{\sqrt{2}}{n}P_{-n}^M\right)|P^M> \\ &= S_{\underbrace{s,s,\ldots,s}_{r}}\left(\frac{\sqrt{2}}{n}P_{-n}^M\right)|P^M> \end{aligned} \qquad (5-77)$$

3-5-5 الشعاع المنفرد عند r=s=3:

عند هذا المستوى نتعامل مع المستوى $k=9$ ، والتجزئات (16) وهذا يعني (16) معامل وعند فك التجزئات تزداد الحدود بشكل كبير. والحد الثني في العلاقة (67-5) يصبح:

$$\sqrt{2}Q_+(P_{(3,3)}^M - Q^M) = 2Q_+^2 - 2 \qquad (5-78)$$

ومن ثم $t_+ = 2Q_+ - 3$ والحد $(2Q_+^2 - 1)$ الذي يظهر عند تطبيق المؤثر L_2 على كثيرة حدود زونال العقدية يأخذ الشكل :

$$(2Q_+^2 - 1) = t_+ + 2 \qquad (5-79)$$

وعند هذا المستوى وبعد إجراء جميع التباديل المرتبة لكثيرات حدود زونال العقدية فإن الشعاع المنفرد يأخذ الشكل:

$$\upsilon_{3,3}=\alpha_{0,0}^{9}Z_{9,0,0}(x)+\alpha_{1,0}^{9}Z_{8,1,0}(x)+\alpha_{2,0}^{9}Z_{7,2,0}(x)+\alpha_{1,1}^{9}Z_{7,1,1}(x)$$
$$+\alpha_{3,0}^{9}Z_{6,3,0}(x)+\alpha_{2,1}^{9}Z_{6,2,1}(x)+\alpha_{4,0}^{9}Z_{5,4,0}(x)+\alpha_{3,1}^{9}Z_{5,3,1}(x)+$$
$$\alpha_{2,2}^{9}Z_{5,2,2}(x)+\alpha_{4,1}^{9}Z_{4,4,1}(x)+\alpha_{3,2}^{9}Z_{4,3,2}(x)+\alpha_{3,3}^{9}Z_{3,3,3}(x)$$

(5-80)

أو بصيغة أخرى:

$$\upsilon_{3,3}=\sum_{9-l-j\geq l\geq j\geq 0}\alpha_{l,j}^{9}(Q_{+})Z_{9-l-j}(\frac{\sqrt{2}}{n}Q_{+}P_{-n}^{M}\mid P_{-n}^{M}>$$

(5-81)

وعند تطبيق L_1 لنحصل على عشر معاملات لا تكفي لإيجاد المعاملات .ولذلك نحتاج إلى تطبيق L_2 على المعاملات $\alpha_{l,i}^{9}$ بدلالة $\alpha_{0,0}^{9}$ وبعد تطبيقه وإجراء فك الحدود وعمليات جبرية طويلة نحصل على المعاملات:

$$\alpha_{1,0}^{9}=-\frac{-(t+9)}{t}\alpha_{0,0}^{9}$$
$$\alpha_{1,1}^{9}=\frac{-(t+9)(t+6)}{(t-3)t}\alpha_{0,0}^{9}$$
$$\alpha_{2,1}^{9}=\frac{-(t+9)(t+7)(t+6)}{(t-3)(t+1)t}\alpha_{0,0}^{9}$$
$$\alpha_{2,0}^{9}=\frac{-18(t+9)}{(t-3)(t+1)t}\alpha_{0,0}^{9}$$

$$\alpha_{3,0}^{9}=\frac{(t+a)(t+7)(t^{2}+st+12)}{(t-3)(t+1)(t+2)t}\alpha_{0,0}^{9}$$

$$\alpha_{2,2}^{9}=\frac{(t+9)(t+7)(t+6)(t+5)}{(t-3)(t+1)(t-1)t}\alpha_{0,0}^{9}$$

$$\alpha_{3,1}^{9}=\frac{-6(t+9)(t+6)}{(t-3)(t+1)(t+2)(t-1)t}\alpha_{0,0}^{9}$$

$$\alpha_{3,2}^{9}=\frac{-(t+9)(t+7)(t+6)(t+5)(t+5)}{(t-3)(t+1)(t+2)(t-1)t}\alpha_{0,0}^{9}$$

$$\alpha_{3,3}^{9}=\frac{(t+9)(t+7)(t+6)(t+5)(t+5)(t+4)}{(t-3)(t+1)(t+1)(t+2)(t-1)t}\alpha_{0,0}^{9}$$

$$\alpha_{4,1}^{9}=\frac{(t+9)(t+7)(t+6)(t+5)}{(t-3)(t+1)(t-1)t}\alpha_{0,0}^{9}=\alpha_{2,2}^{9}$$

$$\alpha_{4,0}^{9}=-\frac{(t+9)(t+7)(t+6)}{(t-3)(t+1)t}\alpha_{0,0}^{9}$$

ولحساب $\alpha_{0,0}^{9}$ بدلالة (Gamma function) نستخدم أي من المعاملات السابقة وبعد عمليات يدوية يصبح مقداره :

$$\alpha_{0,0}^{9}=\frac{(t-3)(t+8)}{\Gamma(10+t)\Gamma(t)\Gamma(t-1)t}$$

وبتنظيم المعاملات باستخدام دالة جاما والمقدار $\alpha_{l,i}$ فإنها تصبح بالشكل :

$$\alpha_{l,l}^{9}(Q_{+})=\frac{(1-)^{l+i}\alpha_{l,i}}{\Gamma(9-l-i+t+1)\Gamma(1+t)\Gamma(t+i-1)t} \qquad (5-82)$$

والمقادير $\alpha_{l,i}$ هي :

$$\alpha_{0,0}=\alpha_{1,0}=(t-3)(t+8),\alpha_{1,1}=\alpha_{2,1}=(t-1)(t+6)$$

$$\alpha_{4,1}=\alpha_{4,0}=-(t+2)(t+3),\alpha_{2,2}=\alpha_{3,2}=\alpha_{3,3}=t(t+5)$$

$$\alpha_{3,0}=-18,\alpha_{3,1}=-6,\alpha_{3,0}=(t^{2}+5t+12)$$

وباعتبار النموذج (p,q)

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq} \qquad (5-83)$$

وعند نموذج ،$\left(Q_+ = \sqrt{\frac{p}{q}}, p = 2, q = 1, c = -2 \right)$

فإن $t = 2Q_+^2 - 3 = 1$ عندها حساب جميع المعاملات مع ملاحظة أن المعامل $\alpha_{l,i}^9$ لا يحتوي أقطاب (poles) حتى عندما $t = 0$. وإنّ بعض المعاملات تنتهي عند كل قيمة من قيم (t)،بينما في جميع الحالات $\alpha_{3,3}^9 \neq 0$

وعند الشحنة المركزية $(c = 1)$ حيث $(Q_+ = 1, p = q = 1, t = -1)$ فإنّ جميع المعاملات تنتهي ما عدا $\alpha_{3,3}^9$.

في هذه الحالة فإن الشعاع المنفرد يأخذ الشكل :

$$V_{3,3} = \alpha_{3,3}^9(Q_+) Z_{3,3,3}\left(\frac{\sqrt{2}Q_+}{n} P_{-n}^M \mid P^M > \right. \qquad (5-84)$$

ويأخذ الشعاع المنفرد في هذه تجزئة الشكل المستطيل بالنسبة لترتيب يونغ ويطابق شكل الشعاع المنفرد في بحث [Bouwknegt(4)].وعند استبدال الهزاز الموجب Q_+ بالهزاز السالب Q_-

$$Q_+ \to Q_-, t_+ \to t_- = 2Q_-^2 - 3$$

وبنموذج (p,q) فأن $t_- = 2\frac{p}{q} - 3$ ومن ثم نحصل على نفس الصيغة للشعاع المنفرد .

5-3-4الشعاع المنفرد عند المستوى $r = 3, s = 4, k = rs = 12$

عند هذا المستوى عدد التجزئات (28) وعدد المعاملات (28) وهذا يزيد عدد الحدود بشكل كبير وتجميع الحدود بعد فك كثيرات زونال المجزأة إلى كثيرات ابتدائية احتاج إلى جهد كبير.

بنفس الطريقة السابقة تم حساب المعاملات، و نورد عدداً منها:

$$\alpha_{1,0}^{12}=-\frac{(t+12)}{t}\alpha_{0,0}^{12},\alpha_{1,1}^{12}=\frac{(t+12)(t+8)}{t(t-4)}\alpha_{0,0}^{12}$$

$$\alpha_{2,1}^{12}=-\frac{(t+12)(t+10)(t+8)}{t(t+1)(t-4)}\alpha_{0,0}^{12},\alpha_{2,0}^{12}=\frac{36(t+12)}{t(t+1)(t-4)}\alpha_{0,0}^{12}$$

$$\alpha_{3,0}^{12}=\frac{(t+12)(t+10)(t^2+7t+28)}{t(t+1)(t+2)(t-4)}\alpha_{0,0}^{12}$$

$$\alpha_{2,2}^{12}=\frac{(t+12)(t+10)(t+8)(t+7)}{t(t+1)(t+2)(t-4)}\alpha_{0,0}^{12}$$

$$\alpha_{6,0}^{12}=\frac{3(t+12)(t+10)(t+8)(t+7)(t+5)(t^2+16t+40)}{t(t+1)(t-2)(t-4)}\alpha_{0,0}^{12}$$

....

$$\alpha_{3,3}^{12}=\frac{(t+12)(t+10)(t+8)(t+7)(t+6)(t+8)}{t(t+1)(t+2)(t-4)(t-2)(t+2)}\alpha_{0,0}^{12}$$

أما عند المستوى r=4,s=4, k=16 ،فإن عدد التجزئات اصبح (58) أي أنّ الشعاع المنفرد يتكون من تركيب (58) كثيرة حدود زونال المجزأة،وعدد الحدود بعد تجميع المتشابه منها اصبح (107). وشكل الشعاع المنفرد:

$$\alpha_{k_1,k_2,k_3,k_4}^{16}=\frac{(-1)^{k_1}\alpha_{k_1,k_2,k_3,k_4}}{t\Gamma\left(k_1+t+1\right)\Gamma(k_2+t)\Gamma(k_3+t-1)\Gamma(k_4+t-2)}$$

ولعدم الإسهاب نورد عدداً منها:

$$\alpha_{14,2,0,0}^{16}=\frac{(3t-115)}{t(t+1)(2t-4)}\alpha_{16,0,0,0}^{16}$$

$$\alpha_{0,0,0,0}^{16}=\frac{(2t-9)(t+15)}{\Gamma(t+15)\Gamma(t+2)\Gamma(t-1)\Gamma(t-2)}$$

$$\alpha^{16}_{14,1,1,0}=\frac{2(t+16)(t+10)}{t(2t-9)}\alpha^{16}_{16,0,0,0}=\frac{2(t-1)(t+10)}{\Gamma(t+15)\Gamma(t+2)\Gamma(t-1)\Gamma(t-2)}$$

$$\alpha^{16}_{15,1,0,0}=\frac{(2t-9)(t+15)}{\Gamma(t+16)\Gamma(t+1)\Gamma(t-1)\Gamma(t-2)}$$

$$\alpha^{16}_{13,2,1,0}=\frac{(2t-9)(t+15)}{\Gamma(t+14)\Gamma(t+2)\Gamma(t)\Gamma(t-2)}$$

وبزيادة مستوى الشعاع المنفرد إلى الحالة العامة $k=rs$ فإنّ الصيغة العامة تأخذ الشكل :

$$V_{r,s}\sum_{\substack{k_1\ge\dots\ge k_r\ge 0\\ k_1+\dots+k_r=rs}}\frac{(-1)^{k_1}\alpha_{k_1,\dots,k_r}(Q_+)}{\Gamma(k_1+t+1)\dots\Gamma(k_r+t-r+2)}Z_{k_1,\dots,k_r}\left(\frac{\sqrt{2}Q_+}{n}P^M_{-n}\right)|P^M> \tag{5-85}$$

والمعاملات $\alpha_{k_1,\dots,k_r}$ تخضع للعلاقة المرجعية :

$$\alpha_{k_1,\dots,k_r}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_{k_1-1,\dots,k_i+1,\dots,k_r} \tag{5-86}$$

والتي تستنتج من تطبيق L_1.

الاثبات:

الشعاع المنفرد عند المستوى $k=rs$

$$V_{r,s}=\sum_{\substack{k_1\ge\dots\ge k_r\ge 0\\ k_1+\dots+k_r=rs}}\frac{(-1)^{k_1}\alpha_{k_1,\dots,k_r}(Q_+)}{\Gamma(k_1+t+1)\dots\Gamma(k_r+t-r+2)}Z_{k_1,\dots,k_r}\left(\frac{\sqrt{2}Q_+}{n}P^M_{-n}\right)|P^M>$$

بتطبيق L_1 على الشعاع المنفرد

$$L_1V_{r,s}=0 \tag{5-87}$$

ومن العلاقة (5-24)

$$L_1 Z_{k_1,....,k_r} = \sum_{j=1}^{r} (k_j - j + t + 1) Z_{k_1,..,k_j-1..,k_r}$$

تصبح العلاقة (5-87) بالشكل :

$$\sum_{\substack{k_1 \geq ... \geq k_r \geq 0 \\ k_1 + ... + k_r = rs}} \alpha_{k_1,...,k_r} \sum_{j=1}^{r} (k_j - j + t + 1) Z_{k_1,..,k_j-1..,k_r} = 0 \quad (5\text{-}88)$$

وبترتيب الحدود المتشابهة التي تحتوي على نفس كثيرة حدود زونال العقدية في كل مرة ، وبعد إجراء جميع التباديل المرتبة تنازلياً، نحصل على عدد من المعادلات حدها الأقصى r ،وبما أنّ كثيرة حدود زونال المرتبة لا تساوي صفر فإنّ المعاملات تساوي صفر ،ولذلك يمكن كتابة كل معادلة بالشكل:

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha^{rs}{}_{k_1,...,k_r} (k_j - j + t + 1) Z_{k_1,..,k_j-1..,k_r} = 0$$

وبالاستفادة من خصائص كثيرات حدود زونال العقدية :

$$Z_{k_1,...,k-1,k,...,k_r}$$
$$Z_k = 0, ...\forall k \leq 0$$

فإنّ بعض كثيرات زونال تنتهي .وبفك الحد الأول للمعادلة (5-88) تصبح بالشكل :

$$\alpha^{rs}{}_{k_1,...,k_r} (k_1 + 1) \sum_{j=1}^{r} \alpha^{rs}{}_{k_1-1,..,k_j+1,..,k_r} (k_j - j + t + 1) = 0$$

وبما أن التجزئة مرتبة تنازلياً، فإنّ نقصان التجزئة الأولى بمقدار (1) يؤدي إلى زيادة تجزئة أخرى بمقدار (1) .

ومن تعريف المعاملات $\alpha^{rs}{}_{k_1,...,k_r}$

$$\alpha^{rs}{}_{k_1,\dots,k_r}(Q_+) = \frac{(-1)^{k_1}\alpha_{k_1,\dots,k_r}}{\Gamma(k_1+t+1)\dots\Gamma(k_r+t-r+2)}$$

والتعويض بالمعادلة أعلاه ينتج:

$$\frac{(-1)^{k_1}\alpha_{k_1,\dots,k_r}(k_1+t)}{\Gamma(k_1+t+1)\dots\Gamma(k_r+t-r+2)} + \sum_{j=2}^{r}\frac{(-1)^{k_1-1}\alpha_{k_1,\dots,k_r}(k_j-j+t+1)}{\Gamma(k_1+t)\dots\Gamma(k_r+t-r+2)} = 0$$

وباستخدام خاصية لدالة غاما

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad (5\text{-}89)$$

واختصار الثوابت المتشابهة فإنّ المعادلة تأخذ الشكل :

$$(-1)\alpha_{k_1,\dots,k_r} + \sum_{j=1}^{r}\alpha_{k_1-1,\dots,k_j+1,\dots,k_r} = 0$$

ثم تصبح :

$$\alpha_{k_1,\dots,k_r} = \sum_{j=1}^{r}\alpha_{k_1-1,\dots,k_j+1,\dots,k_r} \qquad (5\text{-}90)$$

ومن تطبيق L_2 على الشعاع المنفرد تنتج علاقة مرجعية أكثر تعقيداً:

$$\alpha_{k_1,...,k_r}(k_1+1) = -\sum_{j=1}^{r}\alpha_{k_1-2,..,k_j+2,..,k_r}(k_j - j + t + 1)$$
$$+(2Q_+^2 - 1)\sum_{1\le i\le j\le r}\alpha_{k_1-2,..,k_i+1,..,k_j+1,...,k_r}$$

(5−91)

الاثبات:

الشعاع المنفرد $\upsilon_{r,s}$ للمستوى $k = rs$

$$\upsilon_{r,s} = \sum_{\substack{k_1\ge....\ge k_r\ge 0\\ k_1+......+k_r=rs}}\alpha^{rs}_{k_1,....,k_r} Z_{k_1,....,k_r}$$

$$L_2\upsilon_{r,s} = \sum_{\substack{k_1\ge....\ge k_r\ge 0\\ k_1+......+k_r=rs}}\alpha^{rs}_{k_1,....,k_r} L_2 Z_{k_1,....,k_r} = 0 \qquad (5-92)$$

وبالاستفادة من أثر L_2 على $Z_{k_1,....,k_r}$ في العلاقة (5−67) ينتج :

$$\sum_{\substack{k_1\ge....,k_r\ge 0\\ k_1+....+k_r=rs}}\alpha^{rs}_{K_1+....+K_r}[\sum_{j=1}^{r}\left(k_j - j + t + 1\right)Z_{k_1,....,k_j-2,....,k_r}$$
$$+(2Q_+{}^2 - 1)\sum_{1\le i\le j\le r} Z_{k_1,....,k_i-1,....,k_j-1,....,k_r}] = 0$$

ونحصل على معادلات عددها r . وباستخدام خصائص كثيرات حدود زونال المجزأة التالية:

$$Z_{k_1,\ldots,k-2,k,\ldots,k_r} = -Z_{k_1,\ldots,k-1,k-1,\ldots,k_r}$$
$$Z_{k_1,\ldots,k-1,k,\ldots,k_r} = 0$$

فإنّ بعض كثيرات حدود زونال تنتهي وبالتالي فإنّ عدد المعادلات يقل عن r .
ونستطيع كتابة المعادلة (5−92) بالشكل :

$$\sum_{\substack{k_1\geq\ldots\geq k_r\geq 0\\ k_1+\ldots+k_r=rs}} [\sum_{j=1}^{r}\alpha^{rs}_{k_1,\ldots,k_j,\ldots,k_r}\left(k_j - j + t + 1\right)$$
$$+(2Q_+{}^2-1)\sum_{1\leq i\leq j\leq r}\alpha^{rs}_{k_1,\ldots,k_i-1,\ldots,k_j-1,\ldots,k_r}]Z_{k-2,\ldots,k_r} = 0$$

وبما أنّ التجزئات مرتبة تنازلياً ، وكثيرات حدود زونال لا تساوي صفر ،فإنّ معاملاتها تساوي صفر . وكل معادلة تأخذ الشكل :

$$\sum_{j=1}^{r}\alpha^{rs}_{k_1,\ldots,k_j,\ldots,k_r}\left(k_j - j + t + 1\right)$$
$$+(2Q_+{}^2-1)\sum_{1\leq i\leq j\leq r}\alpha^{rs}_{K_1,K_i,\ldots,K_j,\ldots,K_r} = 0$$

وبإخراج الحد الأول للمجموع في الطرف الأيسر .تصبح المعادلة:

$$\alpha^{rs}_{k_1,\ldots,k_r}(k_1+t)+\sum_{j=2}^{r}\alpha^{rs}_{k_1-2,\ldots,k_j+2,\ldots,k_r}\left(k_j - j + t + 1\right)$$
$$+(2Q_+{}^2-1)\sum_{1\leq i\leq j\leq r}\alpha^{rs}_{K_1-2,\ldots,K_i+1,\ldots,K_j+1,\ldots,K_r} = 0$$

وبترتيب العلاقة فإنّها تأخذ الشكل :

$$\alpha^{rs}_{k_1,\ldots,k_r}(k_1+t) = -\sum_{j=1}^{r} \alpha^{rs}_{k_1-2,\ldots,k_j+2,\ldots,k_r}\left(k_j - j + t + 1\right)$$
$$+(2Q_+{}^2 - 1)\sum_{1\le i\le j\le r} \alpha^{rs}_{K_1-2,\ldots,K_i+1,\ldots,K_j+1,\ldots,K_r}\,]$$

(5-93)

ومثال عليها من تطبيق L_2 على $\upsilon_{3,2}$:

$$\upsilon_{3,2} = \alpha^6_{6,0,0} Z_{6,0,0} + \alpha^6_{5,1,0} Z_{5,1,0} + \alpha^6_{4,2,0} Z_{4,2,0}$$
$$+\alpha^6_{4,1,1} Z_{4,1,1} + \alpha^6_{3,3,0} Z_{3,3,0} + \alpha^6_{3,2,1} Z_{3,2,1} + \alpha^6_{2,2,2} Z_{2,2,2}$$

ومن العلاقة الأخيرة بعد تعويض $\sigma = \sqrt{2}Q_+$ تنتج المعادلات :

$$\alpha^6_{6,0,0}(t+6) = -\alpha^6_{4,2,0}(t+1) + \alpha^6_{4,1,1}t - [\alpha^6_{5,1,0} + \alpha^6_{4,1,1}](\sigma^2 - 1)$$
$$\alpha^6_{5,1,0}(t+5) = -\alpha^6_{3,3,0}(t+2) - (\sigma^2 - 1)[\alpha^6_{4,2,0} + \alpha^6_{4,1,1} + \alpha^6_{3,2,1}]$$
$$\alpha^6_{4,2,0}(t+6) = \alpha^6_{3,3,0}(t+3) - \alpha^6_{2,2,2}t - (\sigma^2 - 1)[\alpha^6_{3,3,0} + \alpha^6_{3,2,1}]$$
$$\alpha^6_{4,1,1}(t+4) = \alpha^6_{2,2,2} + (\sigma^2 - 1)[\alpha^6_{3,2,1} + \alpha^6_{2,2,2}]$$

ومن العلاقات المرجعية نستنتج أننا نستطيع إيجاد جميع معاملات كثيرات حدود زونال العقدية في الشعاع المنفرد عند أي مستوى دون الرجوع إلى تطبيق المؤثرات L_1, L_2 على الشعاع المنفرد عند اقتران الجاذبية مع حقل المادة ،وعندما يكون مقدار الشحنة المرجعية $c^M < 1$ فإن حقل الجاذبية يتفاعل بقوة مع حقل المادة ،وفي هذه الحالة يتكون الشعاع المنفرد من تركيب خطي لجميع كثيرات حدود زونال العقدية ذات التجزئة المرتبة تنازلياً .بينما عند $c^M = 1$ فإنّ حقل الجاذبية يتواجد مع حقل المادة لكن دون تفاعل بينهما، وتركب الشعاع المنفرد في هذه الحالة من كثيرة حدود زونال واحدة ذات تجزئة تأخذ الشكل المستطيل .

5-6 النتائج والتوصيات:

تم بناء الأشعة المنفردة باستخدام كثيرات حدود زونال الحقيقية ،وتبين أنّ شكل التجزئة لهذه الأشعة هو مستطيل، وأنه حسب نموذج (p,q) يوجد عدد لانهائي من هذه الأشعة عند كل مستوى (r,s) وأقلها الشكل S^r، وتبين أنه عند أخذ العلاقة بين نموذج كالوغيرو– ساذرلاند ونظرية الحقل التوافقي بعين الاعتبار فإن قيمة محددة للشحنة المركزية($c=-2$) بسبب ثابت الاقتران بينهما β ،وهناك حالات خاصة لنموذج $c=-2$ أهمها عند الوزن التوافقي ($h=-\frac{1}{8}$) وذلك لمقاربة هذا النموذج مع شبكة بوليمر مكثفة [31] ..[Pearce+].

وتم كذلك بناء الأشعة المنفردة للحالات المنفصلة (discrete states) باستخدام كثيرا حدود زونال العقدية، وذلك عن طريق كوهومولوجي BRST عند اقتران الجاذبية في بعدين مع المادة ، وتبين أنّ الشعاع المنفرد عند أي قيمة للشحنة المركزية ($c<1$) مستوى (r,s) يتكون من تركيب خطي لجميع كثيرات حدود زونال عند نفس المستوى ،ويأخذ الشكل المستطيل في التجزئة .

بينما عند ثابت الإقتران $\beta = 1$ في نموذج كالوغيرو–ساذرلاند وكثيرات حدود زونال العقدية حيث تصبح قيمة الشحنة المركزية $c = 1$ فإنّ الشعاع المنفرد يتكون من كثيرة حدود زونال مجزأة واحدة لها تجزئة ذات شكل مستطيل ، وفي هذه الحالة فإنّ الحقول المختلفة تتواجد بشكل حر ولا يوجد تفاعل بينها.

كذلك تم التعبير عن كثيرات حدود زونال من الرتبة الثانية للشعاع المنفرد بدلالة الدوال فوق الهندسية (hypergeomeric functions) وذلك عند إدخال هاملتون كالوغيرو–ساذرلاند من الدرجة الثانية كحالة خاصة ،وذلك للتغلب على التباعدات في دوال الارتباط (correlation functions) في خلية جوردان.

وتم الحصول على علاقة مرجعية أضافية نتجت من تطبيق هاملتون كالوغيرو – ساذرلاند على الشعاع المنفرد عند $c < 1$ ،وتساعد على إيجاد معاملات الشعاع المنفرد دون الحاجة لتطبيق مولدات جبر فيراسورو .

توصي الدراسة بما يلي:

1– دراسة نموذج البوليمرات المكثفة عند الحالات المتصلة ونموذج البوليمرات الخطية باستخدام الأشعة المنفردة بدلالة كثيرات حدود زونال.

2– دراسة دالات الارتباط باستخدام الأشعة المنفردة بدلالة كثيرات حدود زونال عند النقاط الحرجة في التحول الطوري (Phase transition) من الرتبة الثانية لعناصر ومركبات مختلفة وربطها بتدفق الطاقة في النظام الفيزيائي وذلك لغايات صناعية.

3– عمل محاكاة حاسوبية لأثر الحرارة على ارتباط الطول بين جزيئات البوليمر المكثف باستخدام الشعاع المنفرد بدلالة كثيرات حدود زونال بدلاً من النموذج اللوغريتمي.

References

[1]AstashkevichA.Aand Fuchs(1997).D,**A asymptotic For Singular Vectors in Verma Modules over the Virasoro Algebra**, pacific Jornal of Matematics, ,Vol.177.No.2.

[2]Awata. H, Matsuo.Y, Odake.S and Shiraishi.J(1995) , **Collective field theory, Calogero- Sutherland model and generalized matrix models**, Phys. Lett. B347 pp 49-55.

[3]Belavin.A.A, Polyakov.A.M , Zamolodchikov.A.B(1984), **Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory**, Nucl. Phys. B241 pp 333-383.

[4]Bouwknegt P. and MacCarthy J. and Pilch K.(1991), **BRST analysis of physical states for 2D gravity coupled to c < 1**, CERN-TH 6162/91, pp 347-379.

[5]Cardy.J(2013). **Logarithmic conformal field theories as limits of ordinary CFTs and some physical applications**, 2013. arXiv:1302.4279.

[6]Chair .N and Dobrev V. K. and Kanno .H.(1992**), SO(2; c) invariant ring structure of BRST cohomology and singular vectors in 2D gravity with c < 1 matter**, Phys. Lett. B283 , pp 194-202.

[7] Difrancesco.P and Kutasov.D (1991),**Correlation functions in 2D String theory,**physics letters B(261) pp 385-390.

[8] Dotsencko .V.S (1986),**Lectures on Conformal Field Theory**,Landau institute for theoretical physics, Moscow

[9]Elliot.J.P and Dawber.P.G (1989),**symmetry in physics** , 1st edition (V2),The Macmillan press Ltd.Britain.

[10]Erd´elyi. A., Magnus.w, Oberhettinger.P, Tricomi.F, Bertin.D, Fulks, A. Harvey.W, Thomsen.D, Weber.M, Whitney.E,(1981). "**Higher Trascendeltal Functions." 1**. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar,.

[11] Farrell, R. H. (1980**). Calculation of complex zonal polynomials**, 'in P. R. Krishnaiah ("d.), Multivariate Analysis - V, North Holland, pp. 301-320.

[12] Gaberdiel. M.R and Kausch.H.G(1996**). A rational logarithmic conformal field theory**. Phys. Lett. B, 386:131.

[13] Garcıa.J.A(2005), Gonz´alez-Far´ıas.G, **Singular Random Matrix decompositions**: Distributions, Journal of Multivariate Analysis 94(1) pp 109–122.

[14]Garcia .J.A, and F. J. Caro-Lopera.F.J(2006)**, An alternative approach for deriving the Laplace-Beltrami operator for the zonal polynomials of positive semidefinite and definite matrix argument**, Far East J. Math. Sci., 22(3)**,** pp 273-290.

[15]]Dıaz-Garcıa.J.A(2009), Special functions: **Integral properties of Jack polynomials, hypergeometric functions and Invariant polynomials**,http://arxiv.org/abs/0909.1988

[16]Garcia. J.A(2007),**Derivation of the Laplace-Belrami Operator for the Zonal Polynomials of positive Definite Hermitian MatrixArgument,** Applied Mathematical Siences,Vol.1.No.4.191-200

[17]Gurarie.V(1993**), Logarithmic operators in conformal field theory**. Nucl. Phys. B, 410:535.

[18] Ivashkevich .E.V(1999)**.Correlation Functions of Dense Polymers and c=-2 Conformal Field Theory** J.Phys.A32:1691-1699.

[19]James, A. T. (1960). The distribution of the latent roots of the covariance matrix, Annals of Mathematical Statistics 31: 151-158.

[20] James. A.T (1968)**, Calculation of Zonal Polynomial Coefficients By Use of The Laplace Beltrami Operator**, *Ann. Math. Statis*., 39, 1711–1788

[21] James .A.T(1961), **Zonal polynomials of the real positive definite symmetric matrices**, Annals of Mathematics 35(1961) 456–469.

[22] James .A.T(1964), **Distribution of matrix variate and latent roots derived from normal samples**, The Annals of Mathematical Statistics 35 pp 475–501.

[23] Lapointe, L., Lascoux, A. and Morse, J.. **Determinantal expression and recursion for Jack polynomials**, Electroni,c Journal of Combi,natorics (2000)7(1). #N1.

[24] Leigh Alan Roberts(2001)**, Towards Calcolation of Jack**.ph .D thesis , Victoria University of Wellington.

[25] Li .F, Xue .Y(2009**), Zonal polynomials and hypergeometric functions of quaternion matrix argument**, Communications in Statistics, Theory Methods 38(8) 1184-1206.

[26] Macdonald.I.G(1995), **Symmetric functions and Hall polynomials**, 2nd edition, Oxford University Press (1995)

[27] Mickelsson .J**.(1989)Current Algebra and Groups** , 1st edition. Hedly . C .Morris.California.

[28] Mimachi .K and Yamada .Y(1995), **Singular vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials**, Commun. Math. Phys. 174 pp 447-455

[29] Muirhead. R.J (1982), Aspects **of Multivariate Statistical Theory**, 1st edition,John Wiley & Sons,New York,USA.

[30] Pearce. P.A, Rasmussen.J,S.P.Villani(2012)**, Infinitely Extended Kac Table of Solvable Critical Dense Polymers,** arXiv:1210.8301v2

[31] Pearce. P.A., Rasmussen.J**, Solvable critical dense polymers**, J. Stat. Mech. (2007) P02015.

[32] Roberts, L. A. (2001). **A unified view of determinantal expansions for Jack polynomials**,Electronic Journal of Combiratorics S(1). #R3.

[33] Sakamoto R, Shiraishi J. , Arnaudon D, Frappat L. and Ragoucy E(2005)., **Correspondense between conformal field theory and Calogero-Sutherland model**, Nucl. Phys. B704 , pp 490 - 509.

[34] Sakurai.J.J.and Tuan.S(1994),**Modern quantum mechanics.** 1st edition .Addison-Wesley puplishing company,Massachusetts.

[35] Stanley.R.P, **Some combinatorial properties of Jack symmetric functions**, Adv. in Math. 77 (1989) 76-115.

[36] Takemura.A(1982) , **Zonal Polynomials**, Institute of Mathematical Statistics.

[37] Wuxing Cai and Naihuan Sing.(30 may 2011), **Application of Laplace-Beltrami operator for Jack polynomials**, arXiv:1101.5544[math QA].

المراجع باللغة العربية:

[38] ديبرولي، لويس (1967)، **الفيزياءوالميكروفيزياء**، (رمسيس شحاته ، مترجم).مؤسسة سجل العرب،القاهرة.
[39] ديفيس،بول وجوليان بر اون،(1992).**الأوتار الفائقة** ، (ادهم السم ان ،مترجم).دار طلاس للدراسات والترجمة والنشر، دمشق.

[40] سعيد،عبدالقادر (2004)، المتجهات المنفردة للجاذبية ذات البعدين المقترنة مع المادة التوافقية.رسالة ماجستير في الفيزياء.جامعة آل البيت
[41] جرين،برايان (2005) ، **الكون الانيق** (عبدالحليم منصور،نضال شمعون ،مترجم) .
[42] غصيب.هشام(1988) ، **الطريق إلى النسبية** ،ط1،الجمعية العلمية الملكية،عمان.

لمزيد من الاطلاع

Di Francesco.P, Mathieu .P. and Senechal.D(1997)., **Conformal Field Theory**, Springer, NewYork

Schottenloher.M,(2008) , **A Mathematica l introduction to Conformal Field Theory** ,springer .

Tsuchiya .A,Kanie.Y(1986**), Unitary representation of the Virasoro algebra,** Duke Mathematical Journal,Vol 53,No 4

الأبحاث المنشورة أو قبلت للنشر

1. **Abed Alkader .A. Said, Moustafa Sayem eldaher, Nour eddine Chair. Action of Laplace-BeltRami Hamiltonian on Schur polynomials in Conformal field theory. Hadramout University Journal of Natural and Applied Sciences,B 10- N 2(2013)**

2. **Abed Alkader.A.said, Moustafa Sayem eldaher, Nour eddein Chair. Singular vectors in term of Schur polynomials in Conformal field theory, Hadramout University Journal of Natural and Applied Sciences. B 10- N 2(2013).**

3. **Abed Alkader A. Said, Moustafa Sayem eldaher, Nour eddine Chair. Schur polynomials of second order in Calogero-Sutherland Model and Conformal field theory. Research Journal of Alepo University.B 92 (2013).**

4. **Abed Alkader A. Said, Moustafa Sayem eldaher, Nour eddine Chair. Zonal polynomials in Calogero- Sutherland Model and Conformal Quanum field theory Research Journal of Alepo University.(accepted at Mar 2014).**

Abstract

The modern theoretical physics scientists have interested with conformal field theories since they have been connected with theoretical physics ,and started to describe critical phenomena's as phase transition at critical poins, and play central role in string theory . Now they promise to play role in unifying theory for all forces .

Singular vector in conformal field theories is a physical state that gives a description for a matter or string as energy or spin and it concerns with correlation functions between deferent field .It acts as a basis in correlation functions . Studying the correlation length between points at critical degree in second order phase transition can be happened by using these singular vectors .

In this work singular vectors have been constructed by using real zonal polynomials. these singular vectors have rectangular shape . when we take the relation between Calogero – Sutherland model and conformal filed theory in consideration , the central charge has fixed value (c= -2) because the coupled coefficient has the value ($\beta = 2$) in zonal polynomials .We found that there are special cases for (c=-2) model at conformal weight ($h = -\frac{1}{8}$) likes that in conformal logarithmic model for a dense polymer cell.

Also singular vectors has been constructed for discrete states in term of complex zonal polynomials by using BRST cohomology when two dimensional gravity coupled to conformal matter .

The second order zonal polynomials for singular vectors has been written in term of hyper geometric functions by using the second order Calogero-Sutherland as especial case , because to get over divergences in correlation functions in Jordan cell.

Recursion relation was obtained, and resulted from the application of Calogero-Sutherland hamiltonian on singular vector at (c<1) ,which

helps for finding the singular vector coefficients without application of virasoro generators.